線形代数 2, 第 22 回小テスト解答

2018/1/11 担当：那須

$\boxed{1}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に関する以下の問題に答えよ. (**問題は裏にもあるので注意！**) (各 1 点)

(1) A の固有値を全て求めよ.

解答) $|tE - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -1 & t \end{vmatrix} = (t-1)t - (-2)(-1) = t^2 - t - 2 = (t+1)(t-2).$

よって A の固有値は $\lambda = -1, 2.$

(2) A を対角化せよ. すなわち, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を 1 つ与えよ. 解答は「$P = (\ \ )$ のとき, $P^{-1}AP = (\ \ )$ となる」の形で答えること.

解答)

- $\lambda = -1$ のとき,

$$A + E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  A の固有ベクトル (の 1 つ) は, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

- $\lambda = 2$ のとき,

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  A の固有ベクトル (の 1 つ) は, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

よって $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる.

(3) A^n $(n = 0, 1, \ldots)$ を求めよ.

解答)

$$\begin{aligned}
A^n &= P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n + 2^{n+1} & 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^{n+2} + 2^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(4) $a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, \dots)$ の一般項 a_n を求めよ.
(ヒント：$\mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ と置くと, $\mathbf{a}_n = A\mathbf{a}_{n-1} = \cdots = A^{n-1}\mathbf{a}_1 = A^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$)

解答)

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_n &= A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^{n-1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \\ (-1)^n + 2^{n-1} & 2(-1)^{n+1} + 2^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^{n-1} + 2^n + 2(-1)^n + 2^n \\ (-1)^n + 2^{n-1} + 2(-1)^{n+1} + 2^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -(-1)^n + 2(-1)^n + 2 \cdot 2^n \\ -(-1)^{n+1} + 2(-1)^{n+1} + 2 \cdot 2^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^n + 2^{n+1} \\ (-1)^{n-1} + 2^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

よって求める数列 a_n の一般項は,

$$a_n = \frac{1}{3}\left\{(-1)^n + 2^{n+1}\right\}, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

[2] ※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/la2.html