線形代数2, 第21回小テスト解答

2017/12/25 担当：那須

$\boxed{1}$ 次の行列 A が対角化可能かどうかについて答えよ. ただし, A の固有多項式が重根 α を持つ場合には, $\mathrm{rank}(A-\alpha E)$ を計算し, 理由を付して答えること (E は A と同じサイズの単位行列). (各1点)

(1) $A=\begin{pmatrix}-1 & 9\\ -1 & 5\end{pmatrix}$

解答) $|tE-A|=\begin{vmatrix}t+1 & -9\\ 1 & t-5\end{vmatrix}=(t+1)(t-5)-(-9)=t^2-4t+4=(t-2)^2.$

固有多項式が重根 $\lambda=2$ (重複度2) を持つ. $A-2E=\begin{pmatrix}-3 & 9\\ -1 & 3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ より,

$$2-\mathrm{rank}(A-2E)=2-1=1.$$

固有値2に対し, 固有空間の次元が重複度と異なるので, 対角化不可能である.

(2) $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}$

解答) $|tE-A|=\begin{vmatrix}t-2 & 2\\ 2 & t-5\end{vmatrix}=(t-2)(t-5)-2^2=t^2-7t+6=(t-1)(t-6).$

A は相異なる2つの固有値を持つ (固有多項式が重根を持たない) ので, 対角化可能である.

(3) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

解答) $|tE-A|=\begin{vmatrix}t & -1 & -1\\ -1 & t & -1\\ -1 & -1 & t\end{vmatrix}=t^3-3t-2=(t+1)^2(t-2).$

固有多項式が重根 $\lambda=-1$ (重複度2) を持つ. $A+E=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ より,

$$3-\mathrm{rank}(A+E)=3-1=2.$$

固有空間の次元が重複度に等しいので, A は対角化可能である.

(4) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

解答) $|tE-A|=\begin{vmatrix}t-1 & -1 & 0\\ 0 & t-1 & 0\\ 0 & 0 & t-2\end{vmatrix}=(t-1)^2(t-2).$

固有多項式が重根 $\lambda=1$ (重複度2) を持つ. $A-E=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ より,

$$3-\mathrm{rank}(A-E)=3-2=1.$$

固有値1に対し, 固有空間の次元が重複度と異なるので, A は対角化不可能である.

[2]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/la2.html