線形代数2, 第19回小テスト解答

2017/12/18 担当：那須

$\boxed{1}$ (1) 行列 $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&3&1\\1&0&2\end{pmatrix}$ の固有多項式 $g_A(t)$=$|tE-A|$ を計算し, A の固有値 λ を全て求めよ. (3点)

解答) A の固有多項式は,

$$g_A(t)=|tE-A|=\begin{vmatrix}t&0&0\\-1&t-3&-1\\-1&0&t-2\end{vmatrix}=t\begin{vmatrix}t-3&-1\\0&t-2\end{vmatrix}=t(t-3)(t-2).$$

従って A の固有値は $\lambda=0,2,3$ である.

(2) A を対角化せよ. (「$P=(\quad)$ のとき $P^{-1}AP=(\quad)$ となる」の形で答えること.) (3点)

解答)

- $\lambda=0$ のとき,

$$A-0E=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&3&1\\1&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{基本変形}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&3&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$(A-0E)\mathbf{x}=0$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_1=t\begin{pmatrix}-2\\1/3\\1\end{pmatrix}=t'\begin{pmatrix}-6\\1\\3\end{pmatrix}\quad(t,t'\neq 0).$

- $\lambda=2$ のとき,

$$A-2E=\begin{pmatrix}-2&0&0\\1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{基本変形}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$(A-2E)\mathbf{x}=0$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_2=t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\quad(t\neq 0).$

- $\lambda=3$ のとき,

$$A-3E=\begin{pmatrix}-3&0&0\\1&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{基本変形}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$(A-3E)\mathbf{x}=0$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_3=t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad(t\neq 0).$

従って, $P=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1&\mathbf{x}_2&\mathbf{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&0&0\\1&1&1\\3&-1&0\end{pmatrix}$ とおけば, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ となる.

[1]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/la2.html