線形代数 2, 第 17 回小テスト解答

2017/12/11 担当：那須

$\boxed{1}$ (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有多項式 $g_A(t) = |tE - A|$ を計算し, A の固有値 λ を全て求めよ. (3 点)

解答) A の固有多項式は,

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-2 & 1 & -1 \\ 0 & t-3 & 1 \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2(t-3).$$

従って, A の固有値は $\lambda = 2, 3$ である.

(2) A のそれぞれの固有値 λ に対し, 固有空間 $W(\lambda; A)$ を求めよ. (3 点)

解答)

- $\lambda = 2$ のとき,

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って $\lambda = 2$ に対する固有空間は

$$W(2; A) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (A - 2E)\mathbf{x} = 0 \right\} = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

- $\lambda = 3$ のとき,

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って $\lambda = 3$ に対する固有空間は

$$W(3; A) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (A - 3E)\mathbf{x} = 0 \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

[1]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/la2.html