線形代数 2, 第 14 回小テスト解答

2017/11/30 担当：那須

$\boxed{1}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値 λ と固有ベクトル $\mathbf{x}$ を求めよ. (3 点: 固有値 1 点, 固有ベクトル 2 点)

解答) A の固有多項式は

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-3 & -2 \\ -2 & t-3 \end{vmatrix} = (t-3)^2 - (-2)^2 = t^2 - 6t + 5 = (t-1)(t-5).$$

従って A の固有値は $\lambda = 1, 5$.

- $\lambda = 1$ のとき,

$$A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

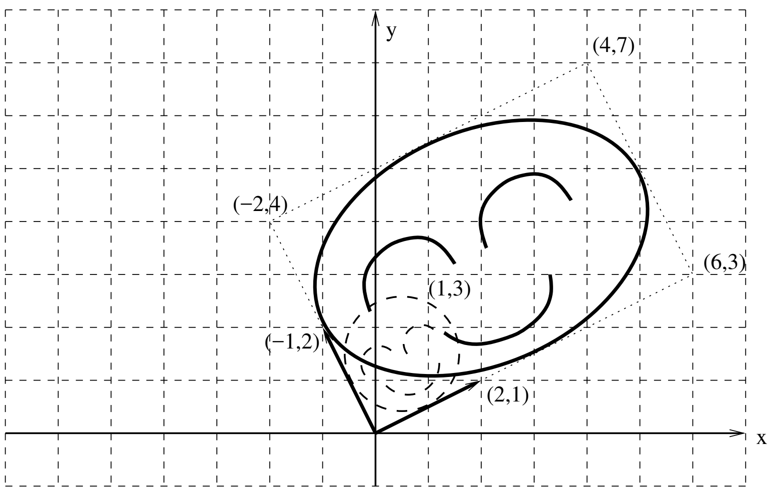
$(A-E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_1 = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_1 \neq 0)$.

- $\lambda = 5$ のとき,

$$A - \lambda E = A - 5E = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A-5E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_2 = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_2 \neq 0)$.

$\boxed{2}$ 2 次正方行列 A が $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ かつ $A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を満たすとする. このとき A の定める線形写像 T により、下の図形（ニコニコマーク）はどのような図形に写されるか？概形を描け. (1 点)



ポイント!

それぞれの固有ベクトルの方向に, 固有値 λ 倍された図形を描く. つまり $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向に 3 倍, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 方向に 2 倍された図形を描く.

---

[1]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/la2.html