線形代数 2, 第 11 回小テスト解答

2017/11/20 担当：那須

$\boxed{1}$ 線形写像 $f: V \to W$ に対し, f の核 $(\ker f)$ と f の像 $(\mathrm{im}\, f)$ の定義を書け. (1 点)

$\ker f := \left\{ \mathbf{x} \in V \;\middle|\; f(\mathbf{x}) = 0 \right\}$

$\mathrm{im}\, f := \left\{ f(\mathbf{x}) \;\middle|\; \mathbf{x} \in V \right\}$

$\boxed{2}$ 線形写像 $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

により定める.

(1) f の核 $(\ker f)$ の次元と 1 組の基底,

(2) f の像 $(\mathrm{im}\, f)$ の次元と 1 組の基底

を求めよ. (各 2 点)

解答) A は基本変形により

$$A \xrightarrow[③+①]{②-3\times①} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{②\times 1/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[③-②]{①-②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と簡約化される. 従って連立方程式 $A\mathbf{x} = 0$ の解は,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3s+5t \\ s-4t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \text{ は任意})$$

で与えられる. よって $\ker f$ の次元は 2 に等しく, $\ker f$ の基底として $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ が取れる.

また簡約化された階段行列により, $\mathrm{im}\, f$ の次元は $\mathrm{rank}\, A = 2$ に等しく, 基底として A の 1 列目と 2 列目である $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ が取れる.

[1]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/la2.html