線形代数2, 第10回小テスト解答

2017/11/16 担当：那須

$\boxed{1}$ (1) $f : V \to W$ をベクトル空間 V からベクトル空間 W への写像とする. f が線形写像であるための必要充分条件を書け. (1点)

(i) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in V$ に対し, $f(\mathbf{x}+\mathbf{x}') = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}')$ が成り立つ.

(ii) 任意の $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in V$ に対し, $f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ が成り立つ.

(2) 線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を,

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$

により定める. 次のベクトル $\mathbf{x}$ に対し, 像 $f(\mathbf{x})$ を求めよ. (各1点)

(a) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -14 \end{pmatrix}$.

(b) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(3) 次の写像 f が線形写像かどうか, 理由も付して答えよ. (各問について, 線形写像かどうかが1点, 理由まで含めて正解で2点)

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (3x, 4y)$

解答) f は線形写像である. f はベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ を用いて, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ と表せる.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = (2x+3y, -x+4y, 5x-2y)$

解答) f は線形写像である. f はベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, と行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ を用いて, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ と表せる.

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x+1, y-1)$

解答) f は線形写像でない. 原点 $\mathbf{o} = (0, 0)$ の f による像は, $f(0, 0) = (1, -1)$ となり, 原点に等しくない.

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f$ は原点 $\mathbf{0}$ の周りの角度 θ の回転

解答) f は線形写像である. f はベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ を用いて, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ と表せる.

[1]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/la2.html