中間テスト準備問題略解

$\boxed{1}$ (1) (a) $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\sigma^{-1}\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

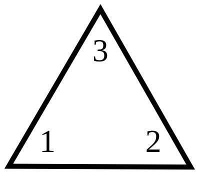
(c) $\sigma^2\tau\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(2) (d) $(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4)(3\ 4\ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 2)(4\ 5)$

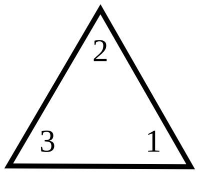
(e) $(1\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 5\ 4)$

(f) $(1\ i\ k)(k\ 2\ j)(k\ i\ 1)(j\ 2\ k) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & i & j & k \\ 2 & k & i & j & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ k)$

$\boxed{2}$ (1) $(2\ 3)(1\ 2)(1\ 3\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)$



(2) $(1\ 2\ 3)(2\ 3)(1\ 3\ 2)(2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)$



$\boxed{3}$ (1) (a) $\sigma = (1\ 4\ 7)(2\ 8\ 6)(3\ 5)$, よって $\mathrm{ord}(\sigma) = 6$.

(b) $\sigma = (1\ 5\ 7)(3\ 8\ 4)$, よって $\mathrm{ord}(\sigma) = 3$.

(c) $\sigma = (1\ 15\ 9\ 11\ 8\ 2\ 13\ 16\ 5\ 3)(4\ 10\ 7\ 14\ 6\ 12)$, よって $\mathrm{ord}(\sigma) = 30$.

(2) σ は偶置換 (あみだくじは省略)

$\boxed{4}$ (1) (a) $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$

(b) $x^6 + y^6 + x^3y^3 = (x^3+y^3)^2 - x^3y^3 = (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2)^2 - \sigma_2^3 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_2^3$

(2) (c) $2\sigma_1^2 - 6\sigma_2$ (d) $\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$ (e) $\sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3$

解説）

(c) f は 2 次式なので,

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = a\sigma_1^2 + b\sigma_2 \qquad (a, b \text{ は定数})$$

とおく. $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ を代入すると, $\sigma_1 = 1+0+0 = 1$ かつ $\sigma_2 = 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$. よって

$$(1-0)^2 + (0-0)^2 + (0-1)^2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 0$$

であり, $a = 2$ を得る. 同様に $(x, y, z) = (1, -1, 0)$ を代入すると, $b = -6$ を得る. 従って $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 2\sigma_1^2 - 6\sigma_2$.

(d) f は 3 次式なので,

$$x^3 + y^3 + z^3 = a\sigma_1^3 + b\sigma_1\sigma_2 + c\sigma_3 \qquad (a, b, c \text{ は定数})$$

と表される. $(x, y, z) = (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, -1, 1)$ などを代入し, a, b, c を求める.

(e) f は 4 次式なので,

$$x^3y+y^3z+z^3x+xy^3+yz^3+zx^3=a\sigma_1^4+b\sigma_1^2\sigma_2+c\sigma_2^2+d\sigma_1\sigma_3 \qquad (a,b,c,d \text{ は定数})$$

とおく. $(x,y,z)=(1,0,0),(1,1,0),(1,-1,0),(1,-1,1)$ などを代入し, a,b,c,d を求める.

(3) 解と係数の関係により,

$$\begin{cases}\sigma_1=\alpha+\beta+\gamma=2\\ \sigma_2=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=7\\ \sigma_3=\alpha\beta\gamma=-5\end{cases}$$

(f) $(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2=2(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=2\sigma_1^2-2\sigma_2=2\cdot 2^2-2\cdot 7=-6$

(g) 前問と同様に, 解の対称式を基本対称式で表せば

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=\sigma_1^2-2\sigma_2=2^2-2\cdot 7=-10.\\ \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2&=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\\ &=\sigma_2^2-2\sigma_3\sigma_1=7^2-2\cdot(-5)\cdot 2=69.\\ \alpha^2\beta^2\gamma^2&=(\alpha\beta\gamma)^2=(-5)^2=25.\end{aligned}$$

よって, 求める方程式は $(x-\alpha^2)(x-\beta^2)(x-\gamma^2)=x^3+10x^2+69x-25=0$.

$\boxed{5}$ (1) (a) f は単射かつ全射 (よって全単射)

(b) f は単射であり全射でない (よって全単射でない)

(c) f は全射であり単射でない (よって全単射でない)

(2) 略

$\boxed{6}$ (1) $g(x,y,z)=\begin{vmatrix}1&1&1\\x^2&y^2&z^2\\x^3&y^3&z^3\end{vmatrix}$, $h(x,y,z)=\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}$ とおけば, 任意の互換 $\tau\in S_3$ に対し,

$$\tau f=\frac{\tau g}{\tau h}=\frac{-g}{-h}=\frac{g}{h}=f.$$

よって f は対称式である.

(2) g と h はそれぞれ 5 次式と 3 次式なので, $f=g/h$ は 2 $(=5-3)$ 次式である.

$$f(x,y,z)=a\sigma_1^2+b\sigma_2 \qquad (a,b \text{ は定数})$$

とおく. $x=0,y=1,z=-1$ $(\sigma_1=0,\sigma_2=-1)$ を代入すると,

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&-1\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&1&1\end{vmatrix}=-2/2=-1=a\cdot 0^2+b\cdot(-1).$$

よって $b=1$ を得る. 一方, $x=0,y=2,z=-1$ $(\sigma_1=1,\sigma_2=-2)$ を代入すると,

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\0&4&1\\0&8&-1\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&-1\\0&4&1\end{vmatrix}=-12/6=-2=a\cdot 1^2+b\cdot(-2).$$

よって, $a=0$ を得る. 従って, $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ $(=\sigma_2)$.

講義に関する情報を次のウェブサイトに置いておく. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/gt.html