代数学序論, 中間試験問題用紙

2017/11/20 担当：那須

- 問題を良く読んで, 解答を別紙「解答用紙」に記入せよ.
- 途中の論理や計算をできる限り丁寧に記し, <u>答えには下線を引く</u> などわかりやすくすること. (**字の粗末な解答, 答えがどれか判別つかない解答は, 減点の対象になる場合がある**).

$\boxed{1}$ 自然数 $n \geq 2$ に対し, S_n は n 次対称群を表す.

(1) 4 次置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ と $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ に対し, 積 $\sigma^{-1}\tau\sigma$ を計算せよ.

(2) サイクルの積 $\sigma = (1\ 4\ 5\ 6)(2\ 4\ 3\ 7)(1\ 5\ 6\ 2) \in S_7$ を計算せよ. ただし, 答えはサイクルの分離積として表すこと.

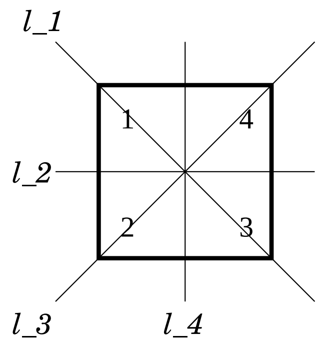
(3) 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 8 & 7 & 9 & 11 & 10 & 3 & 1 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in S_{12}$ の位数を求めよ.

(4) 置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_6$ をあみだくじで表せ. また σ は偶置換と奇置換のいずれか答えよ.

(5) 置換 $\sigma = (1\ \cdots 12)(13\ \cdots\ 17)(18\ \cdots\ 27) \in S_{27}$ の偶奇を判定せよ. ただし, $\cdots$ は連続する整数を表す.

$\boxed{2}$ (1) 右の基準の正方形□を含む平面において, I を恒等変換, R_1,R_2,R_3 を□の中心の周りのそれぞれ角度 90°,180°,270° の回転移動 (反時計回り) とし, さらに T_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ を, 直線 l_i に関する折り返し (対称移動) とする.
基準の正方形□を次の合同変換で変換した正方形を求めよ. なお解答は解答欄の正方形の頂点に数字を記入して答えよ.

□ =

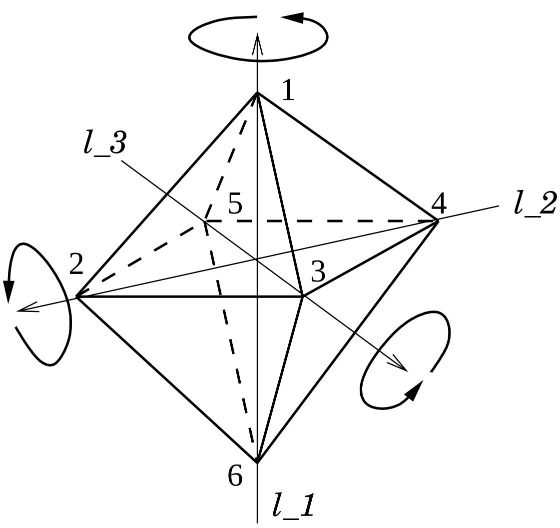


(a) $R_1 \circ T_3$

(b) $R_3 \circ T_4 \circ R_2$

(2) 右の基準の正八面体を含む空間において, 直線 l_i を中心とする角度 90° の回転移動を表す合同変換をそれぞれ R_i とする $(i = 1, 2, 3)$. ただし, 回転は矢印に向かって右ねじ方向 (図の方向) に回転する. なお合同変換 f に対し f^n は f の n 回の合成 $f^n = f \circ \cdots \circ f$ を表すものとする.

基準の正八面体を次の合同変換で変換した正八面体を求めよ. なお解答は解答欄の正八面体の頂点に数字を記入して答えよ.



(c) $(R_3 \circ R_2 \circ R_1)^{10}$

問題は裏面にもあります

$\boxed{3}$ (1) 次の写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ のうち, 全単射であるものを全て選択し, 記号を解答欄に記入せよ.

(a) $f(x)=x(x-1)(x+1)$ (b) $f(x)=x^3$ (c) $f(x)=x+1$

(2) X,Y,Z を集合とし, $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ を写像とする. 次の命題のうち, 正しいものを全て選択し、その記号を解答欄に記入せよ.

(ア) f,g がともに全射ならば, 合成写像 $g\circ f$ も全射である.

(イ) $g\circ f$ が全射ならば, g は全射である.

(ウ) $g\circ f$ が単射ならば, g は単射である.

(エ) $g\circ f$ が全射ならば, f は全射である.

(3) 前問で選択した正しい命題の中から **1つを** 選び, 記号を解答欄に記入した上で, 証明せよ.

$\boxed{4}$ (1) 2変数対称式

$$f(x,y)=x^5+y^5$$

を基本対称式

$$\sigma_1=x+y \qquad \sigma_2=xy$$

を用いて表せ.

(2) 3次方程式

$$x^3-x^2+2x+1=0$$

の3つの解を α,β,γ とする. 平方 $\alpha^2,\beta^2,\gamma^2$ を3つの解に持つような3次方程式をひとつ与えよ.

(3) 3変数対称式

$$f(x,y,z)=x^4+y^4+z^4$$

を基本対称式

$$\sigma_1=x+y+z, \qquad \sigma_2=xy+yz+zx, \qquad \sigma_3=xyz$$

を用いて表せば,

$$f(x,y,z)=a\sigma_1^4+b\sigma_1^2\sigma_2+c\sigma_2^2+d\sigma_1\sigma_3,$$

と表される. 定数 a,b,c,d の値を求めよ.

[0]講義に関する情報は次のサイトを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/gt.html