

期末試験準備問題

1 次の連立合同方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv -4 \pmod{9} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x \equiv -6 \pmod{8} \\ x \equiv 3 \pmod{13} \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{6} \\ x \equiv 5 \pmod{9} \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x \equiv -1 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases} \quad (5) \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv -2 \pmod{5} \\ x \equiv -5 \pmod{9} \end{cases} \quad (6) \begin{cases} x \equiv 7 \pmod{9} \\ x \equiv 4 \pmod{10} \\ x \equiv 4 \pmod{15} \end{cases}$$

2 次の拡大体 K/\mathbb{Q} の \mathbb{Q} 上の拡大次数 $[K:\mathbb{Q}]$ を求めよ.

$$(1) K = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \quad (2) K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7}) \quad (3) K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) \quad (4) K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2})$$

3 次の元 α の有理数体 \mathbb{Q} 上の最小多項式 $f_\alpha(x)$ を求めよ.

$$(1) \alpha = -3 + \sqrt{5} \quad (2) \alpha = \frac{11 - \sqrt{61}}{6} \quad (3) \alpha = \frac{-1 + \sqrt[3]{2}}{2} \quad (4) \alpha = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$$

4 次の多項式 $f(x)$ と $g(x)$ に対し, $f(x)$ と $g(x)$ の最大公約式 $d(x) = \text{GCD}(f(x), g(x))$ を求めよ.
また

$$f(x)a(x) + g(x)b(x) = d(x)$$

を満たす多項式 $a(x), b(x)$ を 1 組与えよ.

$$(1) f(x) = x^2 - 2x - 1, g(x) = x^3 - x - 1$$

$$(2) f(x) = x^3 + x^2 - x + 2, g(x) = x^4 - 4x^2 + x + 2$$

5 次の代数的な元 α に対し, \mathbb{Q} の拡大 $\mathbb{Q}(\alpha)$ を考える. 与えられた α の有理式 $f(\alpha)$ を α の多項式 ($\in \mathbb{Q}[\alpha]$) の形で表せ. ただし, 多項式の次数は拡大次数 $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ 未満で答えよ.

$$(1) \alpha = \sqrt{3} + 1, f(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2 - 3}$$

$$(2) \alpha = -2 + \sqrt{3}, f(\alpha) = \frac{-\alpha + 1}{\alpha^2 + 2}$$

$$(3) \alpha = \sqrt[3]{3}, f(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2 + \alpha}$$

6 2 元体 $\mathbb{F}_2 (= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上の既約多項式 $f(x) = x^3 + x + 1$ を用いて構成された \mathbb{F}_2 の 3 次拡大体

$$\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1)$$

を考える. $f(x)$ の根を α とするとき, \mathbb{F}_8 において, 次の元を計算せよ. (なお答えは α の 2 次以下の多項式で答えること.)

$$(1) \alpha^7 \quad (2) \alpha^5 + \alpha^3 \quad (3) (\alpha^3 + 1)^{100}$$

⁰※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：<http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/fg.html>

略解：

$$\boxed{1} \quad (1) \quad x \equiv 23 \pmod{45}$$

$$(2) \quad x \equiv 42 \pmod{104}$$

$$(3) \quad x \equiv 14 \pmod{18}$$

$$(4) \quad x \equiv 47 \pmod{84}$$

$$(5) \quad x \equiv 103 \pmod{180}$$

$$(6) \quad x \equiv 34 \pmod{90}$$

$$\boxed{2} \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 4 \quad (3) \quad 6 \quad (4) \quad 12$$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad f_{\alpha}(x) = x^2 + 6x + 4 \quad (2) \quad f_{\alpha}(x) = \frac{1}{3}(3x^2 - 11x + 5) \quad (3) \quad f_{\alpha}(x) = \frac{1}{8}(8x^3 + 12x^2 + 6x - 1)$$

$$(4) \quad f_{\alpha}(x) = x^4 - 60x^2 + 36$$

$$\boxed{4} \quad (1) \quad d(x) = 1, a(x) = \frac{1}{7}(-4x^2 + x + 2), b(x) = \frac{1}{7}(4x - 9)$$

$$(2) \quad d(x) = x + 2, a(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + x + 2), b(x) = \frac{x}{2}$$

$$\boxed{5} \quad (1) \quad \frac{2}{11}\alpha - \frac{3}{11} \quad (2) \quad \frac{1}{11}\alpha + \frac{7}{11} \quad (3) \quad \frac{1}{12}\alpha^2 + \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{4}$$

$$\boxed{6} \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad \alpha^2 \quad (3) \quad \alpha^2$$