期末試験問題

- 問題文を良く読み, 解答を別紙「解答用紙」に記入しなさい.
- 答えには下線をひく などし, わかりやすくすること.

$\boxed{1}$ 次の連立合同方程式を解け. ただし答えは $x \equiv a \mod n$ の形に表すこと.

(1) $\begin{cases} x & \equiv -2 \mod 8 \\ x & \equiv 8 \mod 19 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x & \equiv 2 \mod 4 \\ x & \equiv 3 \mod 7 \\ x & \equiv 5 \mod 9 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x & \equiv 5 \mod 8 \\ x & \equiv 9 \mod 10 \\ x & \equiv 5 \mod 12 \end{cases}$

$\boxed{2}$ 次の拡大体 $K/\mathbb{Q}$ の $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数 ($[K:\mathbb{Q}]$) を求めよ.

(1) $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{7})$

(2) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$

(3) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[6]{2})$

$\boxed{3}$ 次の元 α の有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $f_\alpha(x)$ を求めよ.

(1) $\alpha = -4 - \sqrt{14}$ (2) $\alpha = \sqrt{7} - 2\sqrt{2}$

$\boxed{4}$ 多項式 $f(x) = x^3 + 2x + 1$ と $g(x) = x^2 + 1$ に対し, $f(x)$ と $g(x)$ の最大公約式 $d(x) = \mathrm{GCD}(f(x), g(x))$ を求めよ. また

$$f(x)a(x) + g(x)b(x) = d(x)$$

を満たす多項式 $a(x), b(x)$ を 1 組与えよ.

$\boxed{5}$ 次の代数的な元 α に対し, $\mathbb{Q}$ の拡大 $\mathbb{Q}(\alpha)$ を考える. 与えられた α の有理式 $f(\alpha)$ を α の多項式 ($\in \mathbb{Q}[\alpha]$) の形で表せ. ただし, 多項式の次数は拡大次数 $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ 未満で答えよ.

(1) $\alpha = 1 - \sqrt{3}, \quad f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2 + \alpha + 1}$

(2) $\alpha = \sqrt[3]{3}, \quad f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$

$\boxed{6}$ 2 元体 $\mathbb{F}_2$ ($= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) 上の既約多項式 $f(x) = x^3 + x + 1$ を用いて構成された $\mathbb{F}_2$ の 3 次拡大体

$$\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1)$$

を考える. $f(x)$ の根を α とするとき, $\mathbb{F}_8$ において, 次の元を計算せよ. (なお答えは α の 2 次以下の多項式で答えること.)

(1) α^7

(2) $(\alpha + 1)^5$

(3) $(\alpha^2 + 1)^{12}$

[0]※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/fg.html

略解：

$\boxed{1}$ (1)　$x \equiv 46 \mod 152$　(2)　$x \equiv 122 \mod 252$　(3)　$x \equiv 29 \mod 120$

$\boxed{2}$ (1)　4　(2)　4　(3)　6

$\boxed{3}$ (1)　$f_\alpha(x) = x^2 + 8x + 2$　(2)　$f_\alpha(x) = x^4 - 30x^2 + 1$

$\boxed{4}$ $d(x) = 1, \quad a(x) = \dfrac{-x+1}{2}, \quad b(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{2}$

$\boxed{5}$ (1)　$\dfrac{-\alpha+3}{3}$　(2)　$\dfrac{\alpha^2 - \alpha + 1}{4}$

$\boxed{6}$ $\mathbb{F}_2$ 上では $1+1=0$, すなわち $-1=1$ であるので, 従って $\alpha^3 = -1-\alpha = 1+\alpha$ が成り立つ.

(1) $\alpha^7 = \alpha \cdot (\alpha^3)^2 = \alpha \cdot (\alpha+1)^2 = \alpha \cdot (\alpha^2+1) = \alpha^3 + \alpha = 1.$

(2) $(\alpha+1)^5 = (\alpha^3)^5 = \alpha^{15} = \alpha \cdot (\alpha^7)^2 = \alpha \cdot 1^2 = \alpha.$

(3) $(\alpha^2+1)^{12} = ((\alpha+1)^2)^{12} = (\alpha+1)^{24} = (\alpha^3)^{24} = \alpha^{72} = \alpha^{7\times 10+2} = \alpha^2.$