中間レポート問題

- 裏面の注意を良く読んだ上で, 以下の問題の解答をレポート用紙 (A4 サイズ・ホッチキスなどで閉じる) にまとめ, **2017 年 6 月 29 日 (木)16:00** までに理学部事務室のレポートボックスに提出しなさい.

$\boxed{1}$ (1) 次の連立合同方程式を解け.

(a) $\begin{cases} x & \equiv 7 \mod 9 \\ x & \equiv 5 \mod 13 \end{cases}$　　(b) $\begin{cases} x & \equiv 2 \mod 5 \\ x & \equiv -2 \mod 6 \\ x & \equiv 6 \mod 7 \end{cases}$

(2) a, b を整数とする. 連立合同方程式

$$\begin{cases} x & \equiv a \mod 6 \\ x & \equiv b \mod 8 \end{cases} \tag{$\heartsuit$}$$

に関する以下の問いに答えよ.

(c) 解が存在する為の条件を求めよ. (条件を a, b を用いて表せ.)

(d) 前問 (c) で求めた条件のもとで, ($\heartsuit$) の全ての解を求めよ.

$\boxed{2}$ 3 元体 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$ の元を成分とする 2 次正則行列からなる群 G を

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \quad a \neq 0 \right\}$$

と定める. ただし, G の演算は行列の積

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 \mod 3 & a_1b_2 + b_1d_2 \mod 3 \\ c_1a_2 + d_1c_2 \mod 3 & c_1b_2 + d_1d_2 \mod 3 \end{pmatrix}$$

により定める. (通常の行列の積を $\mod 3$ で考える.) 以下の問いに答えよ.

(1) G の元を全て求めよ.

(2) G の各元の位数を求めよ.

(3) G から $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の乗法群 $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\times} = \{1, 2\}$ への準同型写像を,

$$f : G \to (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\times}, \qquad f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\right) = a$$

により定める. f の核 $\ker f$ と像 $\operatorname{im} f$ を求めよ. また $\ker f$ と同型な群の例を 1 つあげよ.

(4) (準同型定理を用いて) $G/\ker f$ と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が群として同型であることを示せ.

(5) G と同型な群の例を 1 つ挙げよ. (ヒント: G の群表を書いてみる.)

$\boxed{3}$ (1) $\mathbb{Q}(\omega) = \mathbb{Q}[\omega]$ を示せ. ただし, ω は 1 の原始 3 乗根, すなわち i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ で, $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とする.

(2) 有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数拡大 $\mathbb{Q}(\alpha)$ において, 次の α の有理式 $f(\alpha)$ を α の多項式の形で表せ. ただし, 多項式の次数は拡大次数 $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ 未満で答えよ.

(a) $\alpha = 1+\sqrt{10}, \quad f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2-\alpha+1}{\alpha+1}$

(b) $\alpha = \sqrt[3]{2}, \quad f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2-2}$

$\boxed{4}$ (1) モジュラー群 $SL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}, \quad ad-bc=1 \right\}$ が 2 つの元

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で生成されることを示せ.

(2) 実際に, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ に対し, A を S と T, およびその逆行列 S^{-1} と T^{-1} の有限積

$$A = \prod_{k=1}^{n} S^{i_k} T^{j_k} = S^{i_1} T^{j_1} \cdots S^{i_n} T^{j_n}, \qquad (i_k, j_k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$$

の形で表せ. (※注意：表し方は一通りではない. どうしてそのように表せるか理由も付して答えること.)

注意点 (良く読んで解答すること)

- 他人のレポートを明らかに写したと判断される場合には, 写したもの写させたものを問わず, 評価を 0 点 とする.
- 図書・文献などを参照し解答した場合には, 参照した文献を明らかにすること.
- 締切は厳守すること. 締切を過ぎて提出されたレポートはいかなる理由があっても受け取りません.

[0] ※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/fg.html