中間テスト準備問題

$\boxed{1}$ 次の (不) 定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(3-2x)^3}$ (2) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x+3}\ dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2\dfrac{x}{5}}$ (4) $\displaystyle\int 5^x\ dx$

(5) $\displaystyle\int (e^{3x}-e^{-3x})^2\ dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$ (7) $\displaystyle\int \frac{4}{1+4x^2}\ dx$ (8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

(9) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+(2x+1)^2}$ (10) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$ (11) $\displaystyle\int \left(\frac{x}{2}+5\right)^{-4}\ dx$

(12) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(\log x)^3}$ (13) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+3}}\ dx$ (14) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x+5)^2}\ dx$

(15) $\displaystyle\int \sin x\cos^5 x\ dx$ (16) $\displaystyle\int xe^{-2x}\ dx$ (17) $\displaystyle\int (2x-1)\cos x\ dx$

(18) $\displaystyle\int \log(x+1)\ dx$ (19) $\displaystyle\int (x^2-x)e^x\ dx$ (20) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x(1+\log x)}dx$

(21) $\displaystyle\int \sqrt{\sin x}\cos^3 x\ dx$ (22) $\displaystyle\int x\log x\ dx$ (23) $\displaystyle\int e^x\sin 3x\ dx$

(24) $\displaystyle\int \cos^2 2x\ dx$ (25) $\displaystyle\int \sin 2x\cos 3x\ dx$ (26) $\displaystyle\int \sin^3 x\ dx$

(27) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x}\ dx$ (28) $\displaystyle\int \sin^2 2x\ dx$ (29) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos^2 x}{1+\sin x}\ dx$

(30) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$ (32) $\displaystyle\int \frac{5x+2}{x^2+2x-8}\ dx$ (33) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$ (34) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2+4}\ dx$

(35) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$ (36) $\displaystyle\int \frac{x(x+3)}{(x+1)(x^2+1)}\ dx$ (37) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^3}$

(38) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x}\ dx$ (39) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x-2)(x+2)}$ (40) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{-4-3x^2}$

$\boxed{2}$ (1) 区間 $[0,1]$ で不等式 $0 \leq \sqrt{1-x^3} \leq 1$ が成り立つことを用いて,

$$0 \leq \int_0^1 \sqrt{1-x^3}\ dx \leq 1$$

を示せ.

(2) $S = 1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt[3]{27}}$ の整数部分を求めよ (ただし, $27 = 3^3$).

$\boxed{3}$ (微分積分学の基本定理)

(1) a が定数のとき, 次の関数を微分せよ.

(a) $\displaystyle F(x) = \int_a^x x\sin t\ dt$ (b) $\displaystyle F(x) = \int_a^x (x-t)f'(t)\ dt$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x \sqrt{t^2+1}\ dt$ を求めよ.

$\boxed{4}$ (部分積分, 教科書 p.126, 例題 4, 問 4)

(1) $I_n = \int (\log x)^n \, dx$ とする. 次の等式を証明せよ.

$$I_n = x(\log x)^n - nI_{n-1}, \qquad (n \text{ は正の整数})$$

(2) $I_n = \int x^n e^x \, dx$ とする. $n \geq 1$ として I_n の漸化式を求めよ.

$\boxed{5}$ 「積分の平均値の定理」, すなわち関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続ならば,

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b-a)f(\xi), \qquad (a \leq \xi \leq b)$$

を満たす ξ が存在することを証明せよ. (教科書 p.149 参照)

$\boxed{6}$ (1) $S = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \cdots + \sqrt{100}$ とする. 不等式 $667 < S < 676$ を証明せよ.

(2) 整数 $n \geq 2, k \geq 1$ に対し, $S = 1 + \frac{1}{\sqrt[n]{2}} + \frac{1}{\sqrt[n]{3}} + \frac{1}{\sqrt[n]{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[n]{k^n}}$ とする.

$$\frac{n(k^n - k + 1) - 1}{(n-1)k} \leq S \leq \frac{nk^{n-1} - 1}{n-1}$$

が成り立つことを証明せよ. (ヒント：任意の自然数 l に対し, 閉区間 $[l, l+1]$ 上の x に対し,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{l+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{l}}$$

が成り立つことを用いる. 講義ノート参照)

[0]※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2017/cal2.html