線形代数 (SP), 期末テスト準備問題解答

2017/1/16 担当：那須

$\boxed{1}$ 次の行列式を計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 22 & -13 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 22 \times (-4) - (-13) \times 3 = -49$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -6 \\ 9 & -8 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[\boxed{2}+2\times\boxed{1}]{\boxed{3}-\boxed{1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & -2 \\ 9 & 10 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} =$
$(-2)\{-3 \times 1 - 1 \times 10\} = 26$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{②}-3\times\text{①}]{\text{③}-\text{①},\text{④}-4\times\text{①}} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{\boxed{1}\text{で展開}} \begin{vmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 7 & -2 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{\boxed{1}+7\times\boxed{3}}$
$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 10 & -1 & 1 \\ -14 & -2 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{①で展開}} - \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -14 & -2 \end{vmatrix} = -(10 \times (-2) - (-1) \times (-14)) = 34$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{①}+(\text{②}+\text{③}+\text{④})} \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{④}-2\times\text{①}]{\text{②}-4\times\text{①},\text{③}-3\times\text{①}}$
$10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\boxed{1}\text{で展開}} 10 \begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\boxed{1}+\boxed{3}} 10 \begin{vmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{\boxed{1}\text{で展開}}$
$-40 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -40((-2) \times (-1) - (-1) \times 2) = -160$

$\boxed{2}$ 次のベクトルの各組の 1 次独立性について判定せよ. (答えのみで良い.)

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ (2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$ (3) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

解答) (1) 一次独立 (2) 一次従属 (3) 一次独立

解説

$A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ とする. 「A の列ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ が一次独立 $\Longleftrightarrow$ rank $= n$」が成り立つ. 簡約化は以下の通り: (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ に対し, 次の設問に答えよ.

(1) A の (i, j) 余因子 Δ_{ij} $(1 \leq i, j \leq 3)$ を全て求めよ.

解答)

$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$ $\Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6$ $\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$

$\Delta_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$ $\Delta_{22} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$ $\Delta_{23} = -\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$

$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 12$ $\Delta_{32} = -\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 21$ $\Delta_{33} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2$

よって,

$$B = (\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 5 & 1 & 6 \\ 12 & 21 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) A の行列式 $|A|$ の値を求めよ.

解答) サラスの公式を用いて $|A| = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 6 + 9 + 6 + 12 + 6 = 31$

(3) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

解答) $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}{}^t(\Delta_{ij}) = \dfrac{1}{31}{}^tB = \dfrac{1}{31} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 12 \\ 6 & 1 & 21 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{4}$ 次の行列 A に対し，$P^{-1}AP$ が対角行列となる正則な正方行列 P を１つ与えよ．なお答えは，「$P = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$ のとき，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$ となる」の形で答えること．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ **解答)** A の固有多項式は，$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 \\ -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-4)$．よって A の固有値は $\lambda = -1, 4$．

- $\lambda = -1$ のとき，$A + E = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$．

  よって A の固有ベクトルの一つは $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ である．

- $\lambda = 4$ のとき，$A - 4E = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$．

  よって A の固有ベクトルの一つは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

したがって $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる．

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **解答)** A の固有多項式は，$|\lambda E - A| == \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$．よって A の固有値は $\lambda = -1, 0, 1$．

- $\lambda = -1$ のとき，$A + E = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  よって A の固有ベクトルの一つは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

- $\lambda = 0$ のとき，$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$．

  よって A の固有ベクトルの一つは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

- $\lambda = 1$ のとき，$A - E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$．

  よって A の固有ベクトルの一つは $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

したがって $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる．

$\boxed{5}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a-1 \end{pmatrix}$ が逆行列を持たないような定数 a の値を **全て** 求めよ．

解答) 行列 A が逆行列 A^{-1} を持たないための必要十分条件は，A の行列式 $|A|$ の値が 0 になることである．

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a-1 \end{vmatrix} \\ &= (a-1)^2(a+1) + 1 + 1 - (a+1) - 2(a-1) \\ &= (a-1)^2(a+1) - 3(a-1) \\ &= (a-1)\{(a-1)(a+1) - 3\} \\ &= (a-1)\{a^2 - 4\} \\ &= (a-1)(a+2)(a-2). \end{aligned}$$

したがって求める定数 a の値は $a = 1, \pm 2$．

$\boxed{6}$ n を自然数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ に対し，A^n を求めよ．

解答) A の固有多項式は，$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3)$．よって A の固有値は $\lambda = 2, 3$．

- $\lambda = 2$ のとき，$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$．

  よって A の固有ベクトルの一つは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

- $\lambda = 3$ のとき，$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$．

  よって A の固有ベクトルの一つは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

したがって $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる．

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 3^n \\ 2^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & -2^{n+1} + 2 \cdot 3^n \\ 2^n - 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[0]講義に関する情報は次のサイトを参照．http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2016/lasp.html