

# 線形代数 (SP) 中間試験準備問題解答

1 次の行列の積を計算せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  のとき,  $A^4$  および  $A^3 - 2A^2 + 5A - E$  を計算せよ.

Hamilton-Cayley の定理より,

$$A^2 - (1+1)A + (1^2 - 2 \cdot (-1))E = A^2 - 2A + 3E = O.$$

従って,  $A^2 = 2A - 3E$  を得る.

$$A^4 = (2A - 3E)^2 = 4A^2 - 12A + 9E = 4(2A - 3E) - 12A + 9E = -4A - 3E = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

一方,

$$A^3 - 2A^2 + 5A - E = (A^2 - 2A + 3E)A + 2A - E = OA + 2A - E = 2A - E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

答え:  $A^4 = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$       $A^3 - 2A^2 + 5A - E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

担当: 那須

3 次の連立1次方程式を掃き出し法を用いて解け. ただし方程式の解が無い場合には, 「解無し」と答えよ.

$$(1) \left( \begin{array}{cc|c} x & y & 6 \\ 1 & 5 & 6 \\ -3 & -8 & 31 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{2}+3\times\textcircled{1}} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 49 \\ 0 & 1 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{2}\times 1/7} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\textcircled{1}-5\times\textcircled{2}} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -29 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 \end{array} \right)$$

よって  $x = -29, y = 7$

$$(2) \left( \begin{array}{ccc|c} x & y & z & 16 \\ 2 & 3 & 4 & 16 \\ 1 & 1 & -6 & -9 \\ 4 & -2 & -3 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{1}\leftrightarrow\textcircled{2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & -9 \\ 2 & 3 & 4 & 16 \\ 4 & -2 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & -6 & -9 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{2}-2\times\textcircled{1}, \textcircled{3}-4\times\textcircled{1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & 1 & 16 & 34 \\ 0 & -6 & 21 & 30 \\ 1 & 1 & -6 & -9 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\textcircled{1}-\textcircled{2}, \textcircled{3}\times 1/117} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -22 & -43 \\ 0 & 1 & 16 & 34 \\ 0 & 0 & 117 & 234 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{1}+22\times\textcircled{3}, \textcircled{2}-16\times\textcircled{3}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

よって  $x = 1, y = 2, z = 2$

$$(3) \left( \begin{array}{ccc|c} x & y & z & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & -9 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{2}-2\times\textcircled{1}, \textcircled{3}+3\times\textcircled{1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{2}\times 1/3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\textcircled{1}+2\times\textcircled{2}, \textcircled{3}+\textcircled{2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

よって  $z = t$  とおけば,  $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases}$  ( $t$  は任意)

4 次の行列を行基本変形を用いて階段行列まで変形し、階数を求めよ。

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{2} + \textcircled{1} \\ \textcircled{3} - 2 \times \textcircled{1} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} + 2 \times \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

従って rank  $A = 3$

$$(2) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} - 2 \times \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{3} + 3 \times \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って rank  $B = 2$

5 次の連立方程式が解を持つように定数  $a$  と  $b$  の値を定め、連立方程式を解け。

$$\left( \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & -2 & -4 & 0 \\ 3 & -5 & -9 & 1 \\ -5 & 6 & 8 & a \\ -7 & 9 & 13 & b \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{2} - 3 \times \textcircled{1}, \textcircled{3} + 5 \times \textcircled{1} \\ \textcircled{4} + 7 \times \textcircled{1} \end{matrix}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -12 & a \\ 0 & -5 & -15 & b \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{1} + 2 \times \textcircled{2}, \textcircled{3} + 4 \times \textcircled{2} \\ \textcircled{4} + 5 \times \textcircled{2} \end{matrix}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a + 4 \\ 0 & 0 & 0 & b + 5 \end{array} \right)$$

従って方程式の解が存在する為には、 $a = -4$  かつ  $b = -5$  が必要十分である。 $z = t$  とおけば、

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = t \end{cases} \quad (t \text{ は任意})$$

6 次の行列  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  を求めよ。

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ 4 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} \times 5} \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ 20 & -45 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} - 4 \times \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{1} - 11 \times \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{1} \times (1/5) \\ \textcircled{2} \times (-1) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって rank  $A = 2$  より、 $A^{-1}$  は存在する。2次単位行列  $E_2$  に上と同じ基本変形を施すと

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} \times 5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} - 4 \times \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{1} - 11 \times \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 45 & -55 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{1} \times (1/5) \\ \textcircled{2} \times (-1) \end{matrix}} \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

従って求める逆行列は  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

---


$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} + \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{2} - \textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} - \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって rank  $A = 3$  より、 $A^{-1}$  は存在する。3次単位行列  $E_3$  に上と同じ基本変形を施すと

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} + \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} \times (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{2} - \textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} - \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

従って求める逆行列は  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

<sup>0</sup>(1) の別解 2次の逆行列の公式:  $ad - bc \neq 0$  のとき  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$  を用いて、

$$A^{-1} = \frac{1}{5 \times (-9) - (-11) \times 4} \begin{pmatrix} -9 & 11 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

と求めても良い。

<sup>0</sup>講義に関する情報を次のウェブサイトにおいておく。 <http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2016/lasp.html>