

1 次の行列  $A$  に対し,  $P^{-1}AP$  が対角行列となる正則な正方行列  $P$  を 1 つ与えよ. なお答えは, 「 $P = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$  のとき,  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$  となる」の形で答えること. (括弧の中には行列が入る.)

(1)  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$       (2)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$       (3)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

2  $n$  を整数とする. 行列  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  のべき乗  $A^n$  を計算せよ. ただし, 問題1で求めた行列の対角化を利用して計算しても良い.

3 (1)  $n$  次正方行列  $A$  の固有多項式が

$$|A - \lambda E| = (-1)^n (\lambda - a_1)^{m_1} \dots (\lambda - a_k)^{m_k}, \quad (\text{ただし } i \neq j \text{ のとき } a_i \neq a_j)$$

のように 1 次式の積に分解するとき,  $A$  が対角化可能であるための必要十分条件を書け.

(2) 次の行列の中で対角化が 可能でないもの を 全て 選び, 空欄の中に番号を記入せよ. なお, 解答は答え (番号) のみで良い.

(1)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,    (2)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,    (3)  $\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ ,    (4)  $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,    (5)  $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  
 (6)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,    (7)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,    (8)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

答

<sup>0</sup>解答: 1 (1)  $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  とおけば,  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$     (2)  $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  とおけば,  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   
 (3)  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  とおけば,  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$     2  $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + (-2)^n & 2 + (-2)^{n+1} \\ 1 - (-2)^n & 1 - (-2)^{n+1} \end{pmatrix}$     3 (1) 各  $i = 1, \dots, k$  について  $n - \text{rank}(A - a_i E) = m_i$  が成り立つ.    (2) (1), (3), (6), (8)  
<sup>0</sup>※この講義に関する情報は次の Web サイトを参照すること. <http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2016/lasp.html>