

1 次のベクトルの組が, 括弧内のベクトル空間の基底になるかどうか答えよ.

(1) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ (ベクトル空間は \mathbb{R}^2)

(2) $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (ベクトル空間は \mathbb{R}^3)

2 \mathbb{R}^3 の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に対し, 線形関係式 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が成り立つとき, 係数 c_1, c_2, c_3 の値を求めよ.

3 連立方程式の解空間

$$W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right\}$$

の次元と 1 組の基底を求めよ. (ヒント: 教科書 p.83, 例題 4.4.1)

⁰略解:

1 (1) $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} + \frac{2}{3} \times \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. rank $A = 1 < 2$ より, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ は \mathbb{R}^2 の基底にならない.

(2) $B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} - 2 \times \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3} + \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

rank $B = 3$ より, $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ は \mathbb{R}^3 の基底になる.

2 c_1, c_2, c_3 の満たす連立方程式を解くと,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{2} + \textcircled{1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\textcircled{3} - \textcircled{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \textcircled{1} - \textcircled{3} \\ \textcircled{2} - \textcircled{3} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right).$$

よって, $c_1 = -2, c_2 = -1, c_3 = 4$.

3 連立方程式の係数行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} \textcircled{2} - 2 \times \textcircled{1} \\ \textcircled{3} + \textcircled{1} \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1} + \textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と簡約化され, 一般の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s - 2t \\ -2s + t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s, t \text{ は任意の実数})$$

と与えられる. ここで, $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は W を生成し, 明らかに 1 次独立である. よって $\dim W = 2$ で $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ が W の 1 組の基底となる.

⁰※この講義に関する情報は次の Web サイトを参照すること. <http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2016/lasp.html>