

1 次のベクトルの組が1次独立かどうか判定せよ. (ヒント：教科書 p.69, 例題 4.2.1)

$$(1) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$(4) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(5) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

⁰略解：

1 (1) $A := (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3)$ とおくと,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-\textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

従って, $\text{rank } A = 3$. 連立方程式 $A\mathbf{x} = 0$ は自明な解 $\mathbf{x} = 0$ しか持たないので, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は一次独立である.

(2) $B := (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3)$ とおくと,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-3 \times \textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} \times 1/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}+\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って, $\text{rank } B = 2 < 3$. 連立方程式 $B\mathbf{x} = 0$ は非自明な解 $\mathbf{x} \neq 0$ を持つので, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ は一次従属である.

(3) $C := (\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \mathbf{c}_3 \ \mathbf{c}_4) = \begin{pmatrix} 2 & -9 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 7 & -1 & -5 & -7 \end{pmatrix}$ とおけば, 明らかに $\text{rank } C \leq 3 < 4$. 従って, 連立方程式

$C\mathbf{x} = 0$ は非自明な解 $\mathbf{x} \neq 0$ を持つので, $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4$ は一次従属である.

(4) 一次独立

(5) 一次従属

—— ポイント! ——

ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ が一次独立であるための必要十分条件は,

$$\text{rank}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = n.$$