線形代数 (SP), 演習問題

2016/12/5 担当：那須

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V の部分集合 W が部分空間であるための必要十分条件を述べよ．(ヒント：教科書 p.64, 定理 4.1.1)

$\boxed{2}$ A を $m \times n$ 行列とする．連立方程式の解の集合

$$W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; A\mathbf{x} = 0 \right\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分空間になることを示せ．(ヒント：教科書 p.65, 例題 4.1.1)

$\boxed{3}$ 次の部分集合 W はベクトル空間 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2_{(x,y)}$ の部分空間となるかどうか答えよ．(ヒント：教科書 p.65, 例題 4.1.2)

(1) $W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x - y = 1 \right\}$

(2) $W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = y = 0 \right\}$

(3) $W = \{(0,0)\}$

(4) $W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$

(5) $W = \left\{ \mathbf{x} = (t, 2t) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$

(6) $W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \right\}$

$\boxed{4}$ 複素数全体の集合 $\mathbb{C} = \left\{ a + b\sqrt{-1} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ が, $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になることを示せ．

---

[0]略解：

$\boxed{1}$ (i) $\mathbf{0}$ が W に含まれる．

(ii) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ ならば, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$ が成り立つ．

(iii) $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in W$ ならば, $a\mathbf{x} \in W$ が成り立つ．

$\boxed{2}$ 教科書 p.65, 例題 4.1.1

$\boxed{3}$ (1) 部分空間でない (2) 部分空間 (3) 部分空間 (4) 部分空間でない (5) 部分空間 (6) 部分空間でない

解説)

(1) $\mathbf{0} = (0,0)$ を含まない．

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおけば, $A\mathbf{x} = 0$ の形

(3) (2) と同じ集合である．

(4) $\mathbf{x} = (1,0)$ のとき, $\mathbf{x} \in W$, $2\mathbf{x} \notin W$

(5) $W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y - 2x = 0 \right\}$ と表せる．

(6) W は原点中心の半径 1 の円．

$\boxed{4}$ 省略

[0]※この講義に関する情報は次の Web サイトを参照すること．http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2016/lasp.html