線形代数・同演習, 中間試験準備問題 (解答)

2016/5/27 担当：那須

$\boxed{1}$ 複素数 $\alpha = 1 + i$ に対し, 以下の問に答えよ.

(1) α を複素平面上に図示し, 極形式を用いて表せ. ただし, α の実部と虚部が分かるように図示すること.

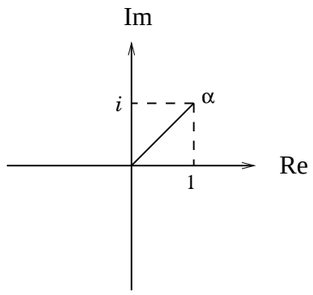
解)

α の絶対値 $|\alpha|$ と偏角 $\arg(\alpha)$ はそれぞれ,

$$|\alpha| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$\arg\alpha = \frac{\pi}{4}$$

と求まる. よって α を極形式で表せば,

$$\alpha = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$



(2) α^{11} を計算せよ.

$$\begin{aligned}
\alpha^{11} &= (\sqrt{2})^{11}\left(\cos\left(\frac{11}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{11}{4}\pi\right)\right) \\
&= 2^5\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) \\
&= 32\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= -32 + 32i
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 次の行列の積を計算せよ.

解)

(1) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ 次の連立１次方程式を掃き出し法を用いて解け. ただし方程式の解が無い場合には,「解無し」と答えよ.

解)

(1) $$\left(\begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 1 & 5 & 6 \\ -3 & -8 & 31 \end{array}\right) \xrightarrow{②+3\times①} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 49 \end{array}\right) \xrightarrow{②\times 1/7} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{①-5\times②} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -29 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

よって $x = -29, y = 7$

(2) $$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 2 & 3 & 4 & 16 \\ 1 & 1 & -6 & -9 \\ 4 & -2 & -3 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & -9 \\ 2 & 3 & 4 & 16 \\ 4 & -2 & -3 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[③-4\times①]{②-2\times①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & 1 & 16 & 34 \\ 0 & -6 & 21 & 30 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[③+6\times②]{①-②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -22 & -43 \\ 0 & 1 & 16 & 34 \\ 0 & 0 & 117 & 234 \end{array}\right) \xrightarrow{③\times 1/117} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -22 & -43 \\ 0 & 1 & 16 & 34 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[②-16\times③]{①+22\times③} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

よって $x = 1, y = 2, z = 2$

(3) $$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & -9 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[③+3\times①]{②-2\times①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{②\times 1/3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[③+②]{①+2\times②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

よって $z = t$ とおけば, $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases}$ (t は任意)

$\boxed{4}$ 次の行列を行基本変形を用いて階段行列まで変形し, 階数を求めよ.

解)

(1)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[③-2\times①]{②+①} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{②\leftrightarrow③} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+2\times②} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

従って $\operatorname{rank} A = 3$

(2)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{②-2\times①} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+3\times②} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って $\operatorname{rank} B = 2$

$\boxed{5}$ 次の連立方程式が解を持つように定数 a と b の値を定め, 連立方程式を解け.

解)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & -2 & -4 & 0 \\ 3 & -5 & -9 & 1 \\ -5 & 6 & 8 & a \\ -7 & 9 & 13 & b \end{array}\right) \xrightarrow[④+7\times①]{②-3\times①,③+5\times①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -12 & a \\ 0 & -5 & -15 & b \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[④+5\times②]{①+2\times②,③+4\times②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+4 \\ 0 & 0 & 0 & b+5 \end{array}\right)$$

従って方程式の解が存在する為には, $a = -4$ かつ $b = -5$. $z = t$ とおけば,

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 - 3t \qquad (t \text{ は任意}) \\ z = t \end{cases}$$

$\boxed{6}$ (1) 2 つの空間ベクトル $\mathbf{a} = (3, -3, -2)$ と $\mathbf{b} = (-1, -2, 1)$ に対し, 外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を求めよ.

解)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (-7, -1, -9)$$

(2) 前問の $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ で張られる平行四辺形の面積を求めよ.

解) 外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の長さは, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ で張られる平行四辺形の面積に等しいので,

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2 + (-9)^2} = \sqrt{49 + 1 + 81} = \sqrt{131}$$

(3) xyz 空間内において, 点 $P(1, 2, 3)$ を通りベクトル $\mathbf{n} = (3, -2, 1)$ に垂直な平面 H の方程式を求めよ.

解) 平面の方程式 $(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = 0$ に代入すると,

$$3(x - 1) - 2(y - 2) + z - 3 = 0$$

式を整理すると, 求める H の方程式は, $3x - 2y + z - 2 = 0$.

$\boxed{7}$ 掃き出し法を用いて, 次の行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

解)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+①} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{②-③} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{①-②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって $\operatorname{rank} A = 3$ より, A^{-1} は存在する. 3 次単位行列 E_3 に上と同じ基本変形を施すと

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+①} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{②-③} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{①-②} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

従って求める逆行列は $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

[0]講義に関する情報を次のウェブサイトに置いておく. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2016/laex.html