1.2 複素数の極形式

複素平面上の点 $z = x + iy$ を考える. z と原点 O との距離は z の絶対値 $r = |z|$ (> 0) に等しく, 実軸の正の向きと z と O を結ぶ線分のなす角は z の偏角 $\theta = \arg(z)$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ に等しい (前回のプリントの図 1 参照). 従って, z の実部 x と虚部 y はそれぞれ

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

と表せ, これを元の $z = x + iy$ に代入すれば

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1.1}$$

を得る. 複素数 z を, 絶対値 r と偏角 θ を用いて表すこの表し方を z の**極形式**と呼ぶ.

例題 1.8. (1) $\sqrt{3} + i$ を極形式で表せ.

(2) $|z| = 2$, $\arg(z) = \dfrac{2}{3}\pi$ である複素数 z を直交形式 $x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ で表せ.

解答) (1) $|\sqrt{3} + i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$. 複素平面に図示すると, $\arg(\sqrt{3} + i) = \dfrac{\pi}{6}$. よって求める極形式は, $\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

(2) $2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right) = 2\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}i$.

問題 1.9. (1) 次の複素数を極形式で表せ：

(a) $\sqrt{3} - i$ (b) $-1 - \sqrt{3}i$ (c) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ (d) $-2i$

(2) 次の複素数を直交形式 $x + iy$ の形に表せ：

(e) $8\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi + i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)$ (f) $2\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi + i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$ (g) $8\left(\cos 7\pi + i\sin 7\pi\right)$

複素数の偏角 $\theta = \arg(z)$ の定義において, θ の範囲を $0 \leq \theta < 2\pi$ に取った. これは z に対し $\arg(z)$ を一意的に定義するためである. しかし, 偏角の定義で 2π の整数倍を無視して考える [2] と都合が良い.

定理 1.10. 複素数 α, β に対し次が成り立つ：

(1) $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ かつ $\arg(\alpha\beta) = \arg(\alpha) + \arg(\beta)$

(2) $\beta \neq 0$ のとき, $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ かつ $\arg\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) = \arg(\alpha) - \arg(\beta)$

複素数の積 $\alpha\beta$ の絶対値は, それぞれの絶対値の積に等しく, $\alpha\beta$ の偏角は, それぞれの偏角の和に等しい. この定理の系 (定理からすぐに出てくる別の定理) として次を得る.

[2] つまり z の偏角が θ のとき $\theta + 2n\pi$ も z の偏角と考える

定理 1.11. z を複素数とし, 絶対値を r, 偏角を θ とする. $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ のベキ乗 z^n は

$$z^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$$

と表される.

特に, $z = \cos\theta + i\sin\theta$ のとき ($|z| = 1$ のとき)

$$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad (n \text{ は整数})$$

を得る. この式は**ド・モアブル (de Moivre) の公式**として良く知られている.

例題 1.12. $(-\sqrt{3}+i)^8$ を計算せよ.

解答) $z = -\sqrt{3}+i$ を極形式で表せば,

$$z = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right).$$

定理より,

$$z^n = 2^n\left(\cos\frac{5n}{6}\pi + i\sin\frac{5n}{6}\pi\right).$$

$n = 8$ のとき,

$$\begin{aligned}
z^8 &= 2^8\left(\cos\frac{40}{6}\pi + i\sin\frac{40}{6}\pi\right)\\
&= 256\left(\cos\frac{20}{3}\pi + i\sin\frac{20}{3}\pi\right)\\
&= 256\left(\cos\left(6+\frac{2}{3}\right)\pi + i\sin\left(6+\frac{2}{3}\right)\pi\right)\\
&= 256\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)\\
&= 256\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\
&= -128 + 128\sqrt{3}i.
\end{aligned}$$

問題 1.13. 次の計算をせよ.

(1) $(1+\sqrt{3}i)^{10}$

(2) $(1-i)^4$

(3) $(1+\sqrt{3}i)^{-8}$

(4) $(-2\sqrt{3}+6i)^{-4}$

[2]※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2016/laex.html