# 1 複素数

## 1.1 複素数の四則演算と複素平面

整数 $(\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ と有理数 $(1/2, -3/4$ など$)$ と無理数 $(\sqrt{2}, \pi$ など$)$ を合わせて**実数**と呼び, 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す. 2 つの実数 $a, b$ を用いて

$$a + bi, \qquad \text{ただし } i = \sqrt{-1}$$

の形に表される数を**複素数**という. 複素数全体の集合を

$$\mathbb{C} := \left\{ a + bi \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

で表す. 複素数 $\alpha = a + bi$ に対し, $a$, $b$ をそれぞれ $\alpha$ の**実部, 虚部**という (記号はそれぞれ $\mathrm{Re}(\alpha)$, $\mathrm{Im}(\alpha)$ で表す. )

**例 1.1.** $\mathrm{Re}(3 - 5i) = 3$, $\mathrm{Im}(3 - 5i) = -5$

**定義 1.2** (複素数の演算)**.** 2 つの複素数 $\alpha = a + bi$, $\beta = c + di$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ に対し,

(1) $\alpha = \beta \iff a = c$ かつ $b = d$

(2) 和：$\alpha + \beta = (a + c) + (b + d)i$
積：$\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)i$

(3) 積：$\alpha\beta = (ac - bd) + (ad + bc)i$

(4) 商：$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$

和・差は実部と虚部をそれぞれ足し・引きする. 積・商は式を展開して, $i^2 = -1$ で読み替える.

**例題 1.3.** 次の計算をせよ：(1) $(1 - 4i)(3 + i) + 2i(2 + 3i)$ (2) $\dfrac{1 + 3i}{2 - 3i}$

(1)

$$\begin{aligned}
(1 - 4i)(3 + i) + 2i(2 + 3i) &= 3 + i - 12i - 4i^2 + 4i + 6i^2 \\
&= 3 + i - 12i + 4 + 4i - 6 \\
&= (3 + 4 - 6) + (1 - 12 + 4)i \\
&= 1 - 7i
\end{aligned}$$

(2)

$$\frac{1 + 3i}{2 - 3i} = \frac{(1 + 3i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{-7 + 9i}{4 - 9i^2} = \frac{-7 + 9i}{13}$$

**問題 1.4.** 次の計算をせよ：(1) $(2 + 3i)(5 - 3i) + 2i(3 + 5i)$ (2) $\dfrac{-7 + 22i}{4 + 5i}$

**定義 1.5.** 複素数 $\alpha = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に対し, 複素数 $\overline{\alpha} = a - bi$ を $\alpha$ の**共役複素数**という.

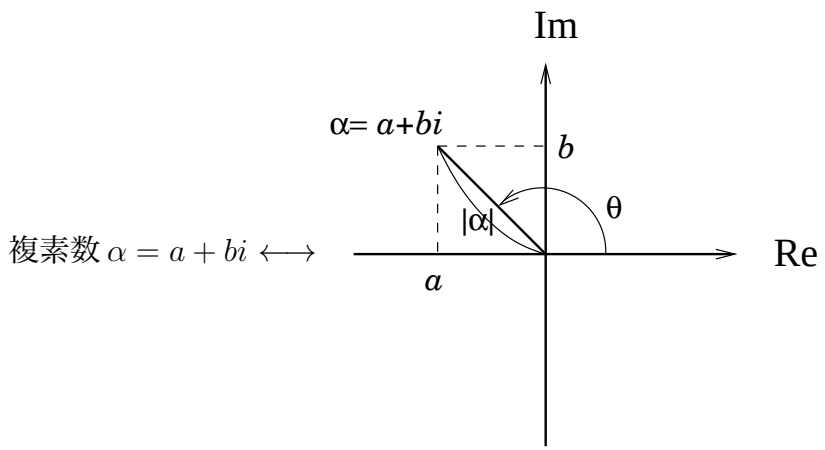


図 1: 複素平面

複素数 $\alpha = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に対し, 平面上の点 $(a, b)$ を対応させる. この対応により, 複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ と平面を同一視する. この平面を**複素平面**という.

複素数 $\alpha = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に対し,

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \arg(\alpha) = \theta$$

をそれぞれ $\alpha$ の**絶対値**と**偏角**という.

**定理 1.6.** 複素数 $\alpha$ に対し, 次が成り立つ.

(1) $|\overline{\alpha}| = |\alpha|$

(2) $|\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha}$

(3) $|\alpha| = 1 \Longleftrightarrow \overline{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$

(4) $|\operatorname{Re}(\alpha)| \leq |\alpha|$ かつ $|\operatorname{Im}(\alpha)| \leq |\alpha|$

**問題 1.7.** (1) 上の定理を証明せよ.

(2) $|\alpha| = 1$ かつ $\alpha \neq -1$ のとき,

$$\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\overline{\alpha}}$$

を求めよ.

(3) $|\alpha| = 1$ かつ $|\alpha - i| = 1$ を満たす複素数 $\alpha$ を全て求めよ. [1]

[1] 2 つの複素数 $\alpha$ と $\beta$ に対し, 絶対値 $|\alpha - \beta|$ は複素平面において $\alpha$ と $\beta$ に対応する 2 点間の距離を表すことに注意せよ.