線形代数・同演習 (DA), 演習問題 (解答)

2016/4/29 担当：那須

$\boxed{1}$ (1) $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 1\cdot(-1)+1\cdot 2+2\cdot 1 = 3$. $|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$. $|\mathbf{b}| = \sqrt{(-1)^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$.

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{3}{(\sqrt{6})^2} = \frac{1}{2}.$$

$0 \le \theta \le \pi$ より, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

(2) $S = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a},\mathbf{b})^2} = \sqrt{6\cdot 6 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

別解) (1) より $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $S = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta = (\sqrt{6})^2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ のように求めても良い.

(3) $\mathbf{x} = (1,1,2) + t(-1,2,1) = (1-t, 1+2t, 2+t)$. 従って

$$(\mathbf{x}, (-1,0,1)) = -(1-t) + 2 + t = 2t+1.$$

$\mathbf{x}$ と $(-1,0,1)$ は直交するので, $2t+1=0$. よって $t = -\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{2}$ (1) 求める直線の方程式は,

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1} \qquad (*)$$

$(x+2 = \dfrac{1}{2}(y-1) = -z$ と書いても正解)

(2) 求める平面の方程式は, $(-1)(x-2) + 2(y+1) + 2(z-1) = 0$. 式を整理して

$$-x + 2y + 2z = -2 \qquad (**)$$

(3) (*) の式で右辺を (従って全ての辺を)t とおけば,

$$x = t-2, \quad y = 2t+1, \quad z = -t.$$

(**) の式に代入して ,

$$-(t-2) + 2(2t+1) + 2(-t) = -2$$

これを解いて $t = -6$. 故に $x = -8, y = -11, z = 6$. 交点の座標は $(x,y,z) = (-8,-11,6)$.

$\boxed{3}$ 内積 $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ と $\mathbf{a},\mathbf{b}$ の長さは, $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 1\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + x\cdot 1 = x-1$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2+(-1)^2+x^2} = \sqrt{x^2+2}$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$ と求められる. したがって,

$$-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+2}\sqrt{6} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\frac{2}{3}\pi = (\mathbf{a},\mathbf{b}) = x-1 \qquad (***)$$

が成り立つ. 2 倍して両辺を 2 乗すると [1] ,

$$6(x^2+2) = 4(x^2-2x+1)$$

を得る.

$$2x^2+8x+8 = 2(x+2)^2 = 0.$$

従って $x = -2$.

[1] 等式 (***) において両辺を 2 乗して x の解を求めるとき, 無縁根が出て来る場合があるので注意すること.

$\boxed{4}$ (1) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) = (2, 5, -6)$

(2) $S = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{2^2+5^2+(-6)^2} = \sqrt{65}$

別解） $|\mathbf{a}| = \sqrt{26}$, $|\mathbf{b}| = 3$, $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 13$ より,

$$S = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a},\mathbf{b})^2} = \sqrt{26\cdot 3^2 - 13^2} = \sqrt{65}.$$

(3) H は $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (2, 5, -6)$ を法線ベクトルに持つ. よって求める平面の方程式は,

$$2(x-2) + 5(y-1) - 6(z+1) = 0.$$

整理して, $2x + 5y - 6z - 15 = 0$.

$\boxed{5}$ 平面の法線ベクトルは $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$, 直線の方向ベクトルは $\mathbf{b} = (-1, 1, 2)$ である.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}, \qquad |\mathbf{b}| = \sqrt{(-1)^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}.$$

さらに内積は

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 = 3.$$

$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角を θ' とすれば,

$$\cos\theta' = \frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{3}{\sqrt{6}^2} = \frac{1}{2}.$$

よって $\theta' = \dfrac{\pi}{3}$. よって求める平面と直線のなす角は $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \theta' = \dfrac{\pi}{6}$.

[1]※この講義に関する情報は次の Web サイトを参照すること. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2016/laex.html