線形代数 2, 第 22 回小テスト解答

2017/1/12 担当：那須

$\boxed{1}$ 次の行列 A が対角化可能かどうかについて答えよ. ただし, A の固有多項式が重根 α を持つ場合には, $\mathrm{rank}(A-\alpha E)$ を計算し, 理由を付して答えること (E は A と同じサイズの単位行列). (各 1 点)

(1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

解答) $|tE - A| = \begin{vmatrix} t+1 & -9 \\ 1 & t-5 \end{vmatrix} = (t+1)(t-5) - (-9) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2.$

固有多項式が重根 $\lambda = 2$ (重複度 2) を持つ. $A - 2E = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より,

$$2 - \mathrm{rank}(A - 2E) = 2 - 1 = 1.$$

固有値 2 に対し, 固有空間の次元が重複度と異なるので, 対角化不可能である.

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

解答) $|tE - A| = \begin{vmatrix} t-2 & 2 \\ 2 & t-5 \end{vmatrix} = (t-2)(t-5) - 2^2 = t^2 - 7t + 6 = (t-1)(t-6).$

A は相異なる 2 つの固有値を持つ (固有多項式が重根を持たない) ので, 対角化可能である.

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解答) $|tE - A| = \begin{vmatrix} t & -1 & -1 \\ -1 & t & -1 \\ -1 & -1 & t \end{vmatrix} = t^3 - 3t - 2 = (t+1)^2(t-2).$

固有多項式が重根 $\lambda = -1$ (重複度 2) を持つ. $A + E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より,

$$3 - \mathrm{rank}(A + E) = 3 - 1 = 2.$$

固有空間の次元が重複度に等しいので, A は対角化可能である.

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

解答) $|tE - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & 0 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)^2(t-2).$

固有多項式が重根 $\lambda = 1$ (重複度 2) を持つ. $A - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ より,

$$3 - \mathrm{rank}(A - E) = 3 - 2 = 1.$$

固有値 1 に対し, 固有空間の次元が重複度と異なるので, A は対角化不可能である.

[2]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2016/la2.html