# 線形代数 2, 第 17 回小テスト解答

2016/12/12 担当：那須

$\boxed{1}$ (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有多項式 $g_A(t) = |tE - A|$ を計算し, $A$ の固有値 $\lambda$ を全て求めよ. (3 点)

**解答)** $A$ の固有多項式は,

$$\begin{aligned} g_A(t) = |tE - A| &= \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & -2 \\ 0 & 1 & t-4 \end{vmatrix} = (t-1)\begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ 1 & t-4 \end{vmatrix} \\ &= (t-1)\{(t-1)(t-4) - (-2)\} \\ &= (t-1)(t^2 - 5t + 6) \\ &= (t-1)(t-2)(t-3) \end{aligned}$$

従って $A$ の固有値は $\lambda = 1, 2, 3$ である.

(2) $A$ のそれぞれの固有値に対し, 固有ベクトル $\mathbf{x}$ を求めよ. (3 点)

**解答)**

- $\lambda = 1$ のとき,

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A - E)\mathbf{x} = 0$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_1 = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t_1 \neq 0)$.

- $\lambda = 2$ のとき,

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A - 2E)\mathbf{x} = 0$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_2 = t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_2 \neq 0)$.

- $\lambda = 3$ のとき,

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A - 3E)\mathbf{x} = 0$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_3 = t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_3 \neq 0)$.

ポイント!

固有値 $\lambda$ に対する固有ベクトルは, 連立方程式 $(A - \lambda E)\mathbf{x} = 0$ を解いて求める.

[1]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2016/la2.html