線形代数 2, 第 12 回小テスト解答

2016/11/24 担当：那須

$\boxed{1}$ 次の線形写像 $f:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^4$ について, (1) $\ker f$ の次元と 1 組の基底, (2) $\operatorname{im} f$ の次元と 1 組の基底を求めよ. (各 2 点)

$$f(\mathbf{x})=A\mathbf{x},\quad A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-2&-1\\1&-1&-2&1&-2\\-1&1&1&1&3\\1&-1&-2&0&0\end{pmatrix}$$

解答) 行列 A は

$$A\xrightarrow[④-①]{②-①,③+①}\begin{pmatrix}1&-1&-1&-2&-1\\0&0&-1&3&-1\\0&0&0&-1&2\\0&0&-1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[④-②]{①-②}\begin{pmatrix}1&-1&0&-5&0\\0&0&-1&3&-1\\0&0&0&-1&2\\0&0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[④-③]{①-5\times③,②+3\times③}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&-10\\0&0&-1&0&5\\0&0&0&-1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[③\times(-1)]{②\times(-1)}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&-10\\0&0&1&0&-5\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

と簡約化される. 従って連立方程式 $A\mathbf{x}=0$ の解は,

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}s+10t\\s\\5t\\2t\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}10\\0\\5\\2\\1\end{pmatrix}\qquad(s,t\text{ は任意})$$

で与えられる. よって $\ker f$ の次元は 2 に等しく, $\ker f$ の基底として $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10\\0\\5\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ が取れる.

また簡約化された階段行列により, $\operatorname{im} f$ の次元は $\operatorname{rank} A=3$ に等しく, 基底として A の $1,3,4$ 列目である $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ が取れる.

[1]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2016/la2.html