代数学序論, 期末テスト準備問題解答 (一部略解)

2016/7/18 担当：那須

$\boxed{1}$ (1) 9 を法として式の両辺を考える．

$$54321 \equiv 5+4+3+2+1 = 15 \equiv 6 \pmod 9,$$

と $12345 \equiv 6 \pmod 9$ より，

$$54321 \times 12345 \equiv 6^2 = 36 \equiv 0 \pmod 9.$$

よって左辺は 0 に合同である．一方, 右辺は

$$6\square 0592745 \equiv \square + 2 \pmod 9$$

に合同である．よって $\square$ には $\underline{7}$ が入る．

(2) 2015 年の直近の閏年は 2016 年である．2050 年までの閏年は, $\dfrac{2048-2016}{4}+1=9$ 年ある．よって 2015 年 1 月 8 日から 2050 年 1 月 31 日までの日数を 7 を法として考えれば,

$$\begin{aligned} &365 \times (2050-2015) + \underbrace{9}_{\text{閏年の分}} + (31-8) \\ &\equiv 1 \times 35 + 9 + 23 \\ &\equiv 4 \pmod 7 \end{aligned}$$

より, 4 に合同である．よって 2050 年 1 月 31 日は, 木曜日の 4 日後の $\underline{\text{月曜日}}$ である．

(3) ユークリッドの互除法により,

$$\begin{aligned} 2754 &= 792 \times 3 + 378 \\ 792 &= 378 \times 2 + 36 \\ 378 &= 36 \times 10 + 18 \\ 36 &= 18 \times 2 \end{aligned}$$

よって, $\gcd(2754, 792) = \underline{18}$.

$\boxed{2}$ (1) ユークリッドの互除法により, $42 = 13 \times 3 + 3$, $13 = 3 \times 4 + 1$. 行列で表せば,

$$\begin{pmatrix} 42 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

従って

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 42 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 42 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

第 2 成分を比較して, $1 = 42 \times (-4) + 13 \times 13$ を得る． よって $x=-4$, $y=13$ は $42x+13y=1$ の 1 つの解である．全ての解 (一般解) は $\underline{\begin{cases} x = -4+13t \\ y = 13-42t \end{cases} \quad (t \text{ は整数})}.$

(2) 81 と 48 の最大公約数は 3 に等しい．式の両辺を 3 で割れば, 同値な方程式

$$27x + 16y = 3$$

を得る．ユークリッドの互除法により, $27 = 16 \times 1 + 11$ $16 = 11 \times 1 + 5$, $11 = 5 \times 2 + 1$. 逆に,

$$\begin{aligned} 1 &= 11 - 5 \times 2 \\ &= 11 - (16-11) \times 2 \\ &= 11 \times 3 - 16 \times 2 \\ &= (27-16) \times 3 - 16 \times 2 \\ &= 27 \times 3 - 16 \times 5. \end{aligned}$$

よって $x=3$, $y=-5$ は方程式 $27x+16y=1$ の 1 つの解である．つまり $x=9$, $y=-15$ は方程式 $27x+16y=3$ の 1 つの解．一般解は $\underline{\begin{cases} x = 9+16t \\ y = -15-27t \end{cases} \quad (t \text{ は整数})}.$

(3) $\begin{cases} x = 14+32t \\ y = -10-23t \end{cases} \quad (t \text{ は整数})$

(4) $\begin{cases} x = -21+45t \\ y = 15-32t \end{cases} \quad (t \text{ は整数})$

(5) 16 と 76 の最大公約数は 4 である．方程式 $16x+76y=6$ の右辺 6 は 4 の倍数でない．従って方程式の解は存在しない．

(6) $\begin{cases} x = -9+41t \\ y = 10-44t \end{cases} \quad (t \text{ は整数})$

$\boxed{3}$ (1) 4 $\quad (271828 \equiv 31828 \equiv 7828 \equiv 628 \equiv 68 \equiv 4 \mod 8)$

(2) 3 $\quad (1234 \equiv 12,\ 5678 \equiv 10 \mod 13$. よって $1234 \times 5678 \equiv 12 \times 10 = 120 \equiv 3)$

(3) 9 $\quad (5^2 \equiv 25 \mod 3 \mod 11$. よって $5^4 \equiv (5^2)^2 \equiv 3^2 = 9)$

(4) 不定方程式 $16x+29y=1$ の整数解を求める．ユークリッドの互除法により, $29 = 16 \times 1 + 13$, $16 = 13 \times 1 + 3$, $13 = 3 \times 4 + 1$. 計算を逆にたどって

$$\begin{aligned} 1 &= 13 - 3 \times 4 \\ &= 13 - (16-13) \times 4 \\ &= 13 \times 5 - 16 \times 4 \\ &= (29-16) \times 5 - 16 \times 4 \\ &= 29 \times 5 - 16 \times 9. \end{aligned}$$

よって $16 \times (-9) \equiv 1 \pmod{29}$. 従って
$16^{-1} \pmod{29} = -9 \equiv \underline{20}$.

(5) 存在しない

(6) 41

(7) 51

(8) 4

$\boxed{4}$ (1) 不定方程式 $20x + 33y = 1$ を解く. ユークリッドの互除法により, $33 = 20 \times 1 + 13$, $20 = 13 \times 1 + 7$, $13 = 7 \times 1 + 6$, $7 = 6 \times 1 + 1$. 計算を逆にたどって,

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 6 \\ &= 7 - (13 - 7) \\ &= 7 \times 2 - 13 \\ &= (20 - 13) \times 2 - 13 \\ &= 20 \times 2 - 13 \times 3 \\ &= 20 \times 2 - (33 - 20) \times 3 \\ &= 20 \times 5 - 33 \times 3. \end{aligned}$$

よって, $20^{-1} \equiv 5 \pmod{33}$. 従って

$$x = 20^{-1} \times 9 \equiv 5 \times 9 = 45 \equiv \underline{12 \pmod{33}}.$$

(2) $35 = 7 \times 5$ と $63 = 7 \times 9$ の最大公約数は 7 であり, $21 = 7 \times 3$ の約数であるから, 方程式は解を持つ. まず合同方程式 $5x \equiv 3 \mod 9$ を解く.

$$5^{-1} \mod 9 = 2 \qquad (実際\ 5 \times 2 = 10 \equiv 1 \mod 9)$$

より, $5x \equiv 3$ の両辺に $5^{-1} = 2$ をかけて

$$x = 5^{-1} \times 3 \equiv 2 \times 3 = 6 \pmod 9$$

となる. よって元の方程式 $35x \equiv 21 \pmod{63}$ の解は, これを $\mod 63$ で考えて $x \equiv \underline{6, 15, 24, 33, 42, 51, 60 \pmod{63}}$ [1].

(3) $24 = 4 \times 6$ と $52 = 4 \times 13$ の最大公約数は 4 である. 合同方程式 $24x \equiv 10 \pmod{52}$ が解を持てば, 不定方程式 $24x + 52y = 10$ が整数解を持つ. しかし方程式の左辺は $24x + 52y = 4(6x + 13y)$ で 4 の倍数であり, 右辺の 10 は 4 で割り切れないので, 整数解は存在しない. よってこの方程式は「解無し」.

(4) $x \equiv 12 \pmod{49}$

(5) $x \equiv 25, 66, 107 \pmod{123}$

(6) $x \equiv 62 \pmod{173}$

$\boxed{5}$ (1) $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ の元 a に対し,

$$a \in (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times \iff a\ と\ 15\ が互いに素.$$

よって,

$$(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}.$$

(2) $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times = \{1, 5, 7, 11\}$ である. 群表は,

×	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

(3) 31 を法として,

$$\begin{aligned} 8^2 &= 64 \equiv 2, \\ 8^3 &\equiv 2 \times 8 = 16 \\ 8^4 &\equiv 16 \times 8 = 128 \equiv 4, \\ 8^5 &\equiv 4 \times 8 = 32 \equiv 1 \end{aligned}$$

である. 従って

$$8^n \not\equiv 1 \pmod{31} \qquad (n < 5) \qquad かつ \qquad 8^5 \equiv 1 \pmod{31}.$$

よって $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$ における 8 の位数は 5 である.

(4) $2014 = 5 \times 402 + 4$. 従って 31 を法として,

$$8^{2014} = (8^5)^{402} \times 8^4 \equiv 1^{402} \times 8^4 \equiv 8^4 \equiv 4.$$

よって $a = 4$.

$\boxed{6}$ (1) $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ における 7 の位数は 4 である. 従って

$$7^{100} \equiv (7^4)^{25} \equiv 1^{25} = 1 \mod 20.$$

同様に計算すると, 他の答えは以下の通りとなる: (2) 5 (3) 9 (4) 17

[1] mod 63 での解は mod 9 での解 $x = 6$ を 9 ずつずらして得られ, 解の個数は 35 と 63 の最大公約数 7 に等しくなる.
[1]講義に関する情報を以下のウェブサイトを参照のこと http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2016/gt.html