中間テスト準備問題略解

$\boxed{1}$ (1) (a) $\tau\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$

(b) $\sigma^{-1}\tau = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$

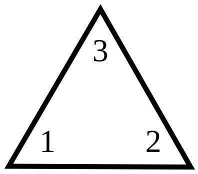
(c) $\sigma^2\tau\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$

(2) (d) $(1\ 2\ 3)(2\ 3\ 4)(3\ 4\ 5) = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&5&4\end{pmatrix} = (1\ 2)(4\ 5)$

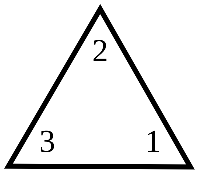
(e) $(1\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)^2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&3&1&4\end{pmatrix} = (1\ 5\ 4)$

(f) $(1\ i\ k)(k\ 2\ j)(k\ i\ 1)(j\ 2\ k) = \begin{pmatrix}1&2&i&j&k\\2&k&i&j&1\end{pmatrix} = (1\ 2\ k)$

$\boxed{2}$ (1) $(2\ 3)(1\ 2)(1\ 3\ 2) = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)$



(2) $(1\ 2\ 3)(2\ 3)(1\ 3\ 2)(2\ 3) = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)$



$\boxed{3}$ (1) (a) $\sigma = (1\ 4\ 7)(2\ 8\ 6)(3\ 5)$, よって $\mathrm{ord}(\sigma) = 6$.

(b) $\sigma = (1\ 5\ 7)(3\ 8\ 4)$, よって $\mathrm{ord}(\sigma) = 3$.

(c) $\sigma = (1\ 15\ 9\ 11\ 8\ 2\ 13\ 16\ 5\ 3)(4\ 10\ 7\ 14\ 6\ 12)$, よって $\mathrm{ord}(\sigma) = 30$.

(2) σ は偶置換 (あみだくじは省略)

$\boxed{4}$ (1) (a) $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$

(b) $x^6 + y^6 + x^3y^3 = (x^3+y^3)^2 - x^3y^3 = (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2)^2 - \sigma_2^3 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_2^3$

(2) (c) $2\sigma_1^2 - 6\sigma_2$ (d) $\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$ (e) $\sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3$

解説)

(c) f は 2 次式なので,

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = a\sigma_1^2 + b\sigma_2 \qquad (a, b\ \text{は定数})$$

とおく. $(x,y,z) = (1,0,0)$ を代入すると, $\sigma_1 = 1+0+0 = 1$ かつ $\sigma_2 = 1\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$. よって

$$(1-0)^2 + (0-0)^2 + (0-1)^2 = a\cdot 1^2 + b\cdot 0$$

であり, $a = 2$ を得る. 同様に $(x,y,z) = (1,-1,0)$ を代入すると, $b = -6$ を得る. 従って $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 2\sigma_1^2 - 6\sigma_2$.

(d) f は 3 次式なので,

$$x^3 + y^3 + z^3 = a\sigma_1^3 + b\sigma_1\sigma_2 + c\sigma_3 \qquad (a, b, c\ \text{は定数})$$

と表される. $(x,y,z) = (1,0,0), (1,1,0), (1,-1,1)$ などを代入し, a, b, c を求める.

(e) f は 4 次式なので,

$$x^3y + y^3z + z^3x + xy^3 + yz^3 + zx^3 = a\sigma_1^4 + b\sigma_1^2\sigma_2 + c\sigma_2^2 + d\sigma_1\sigma_3 \qquad (a, b, c, d \text{ は定数})$$

とおく. $(x, y, z) = (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, -1, 0), (1, -1, 1)$ などを代入し, a, b, c, d を求める.

(3) 解と係数の関係により,

$$\begin{cases} \sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ \sigma_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 7 \\ \sigma_3 = \alpha\beta\gamma = -5 \end{cases}$$

(f) $(\alpha + \beta)^2 + (\beta + \gamma)^2 + (\gamma + \alpha)^2 = 2(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 2\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 7 = -6$

(g) 前問と同様に, 解の対称式を基本対称式で表せば

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 2^2 - 2 \cdot 7 = -10. \\ \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 &= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \\ &= \sigma_2^2 - 2\sigma_3\sigma_1 = 7^2 - 2 \cdot (-5) \cdot 2 = 69. \\ \alpha^2\beta^2\gamma^2 &= (\alpha\beta\gamma)^2 = (-5)^2 = 25. \end{aligned}$$

よって, 求める方程式は $(x - \alpha^2)(x - \beta^2)(x - \gamma^2) = x^3 + 10x^2 + 69x - 25 = 0$.

$\boxed{5}$ (1) (a) f は単射かつ全射 (よって全単射)

(b) f は単射であり全射でない (よって全単射でない)

(c) f は全射であり単射でない (よって全単射でない)

(2) 略

$\boxed{6}$ (1) $g(x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$, $h(x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ とおけば, 任意の互換 $\tau \in S_3$ に対し,

$$\tau f = \frac{\tau g}{\tau h} = \frac{-g}{-h} = \frac{g}{h} = f.$$

よって f は対称式である.

(2) g と h はそれぞれ 5 次式と 3 次式なので, $f = g/h$ は 2 $(= 5 - 3)$ 次式である.

$$f(x, y, z) = a\sigma_1^2 + b\sigma_2 \qquad (a, b \text{ は定数})$$

とおく. $x = 0, y = 1, z = -1$ $(\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -1)$ を代入すると,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2/2 = -1 = a \cdot 0^2 + b \cdot (-1).$$

よって $b = 1$ を得る. 一方, $x = 0, y = 2, z = -1$ $(\sigma_1 = 1, \sigma_2 = -2)$ を代入すると,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 8 & -1 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -12/6 = -2 = a \cdot 1^2 + b \cdot (-2).$$

よって, $a = 0$ を得る. 従って, $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ $(= \sigma_2)$.

講義に関する情報を次のウェブサイトに置いておく. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2016/gt.html