

期末テスト準備問題

1 (1) 次の連立合同方程式を解け.

$$(a) \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv -4 \pmod{9} \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x \equiv -6 \pmod{8} \\ x \equiv 3 \pmod{13} \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x \equiv -1 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv -2 \pmod{5} \\ x \equiv -5 \pmod{9} \end{cases}$$

(2) 連立合同方程式 $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{6} \\ x \equiv 5 \pmod{9} \end{cases}$ の全ての解を求めよ.

2 次の体の拡大 L/K の拡大次数 $[L:K]$ を求めよ.

(1) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{5}), K = \mathbb{Q}$

(3) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}), K = \mathbb{Q}$

(2) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7}), K = \mathbb{Q}$

(4) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}), K = \mathbb{Q}$

3 次の元 α の有理数体 \mathbb{Q} 上の最小多項式 $f_\alpha(x)$ を求めよ.

(1) $\alpha = -3 + \sqrt{5}$

(3) $\alpha = \frac{-1 + \sqrt[3]{2}}{2}$

(2) $\alpha = \frac{11 - \sqrt{61}}{6}$

(4) $\alpha = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

4 次の多項式 $f(x)$ と $g(x)$ に対し, $f(x)$ と $g(x)$ の最大公約式 $d(x) = \text{GCD}(f(x), g(x))$ を求めよ.
また

$$f(x)a(x) + g(x)b(x) = d(x)$$

を満たす多項式 $a(x), b(x)$ を 1 組与えよ.

(1) $f(x) = x^2 - 2x - 1, g(x) = x^3 - x - 1$

(2) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 2, g(x) = x^4 - 4x^2 + x + 2$

5 有理数体 \mathbb{Q} の代数拡大 $\mathbb{Q}(\alpha)$ において, 次の α の有理式 $f(\alpha)$ を α の多項式の形で表せ. ただし, 多項式の次数は拡大次数 $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ 未満で答えよ.

(1) $\alpha = \sqrt{3} + 1, f(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2 - 3}$

(2) $\alpha = -2 + \sqrt{3}, f(\alpha) = \frac{-\alpha + 1}{\alpha^2 + 2}$

(3) $\alpha = \sqrt[3]{3}, f(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2 + \alpha}$

⁰※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：<http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/fg.html>

略解：

- 1 (1) (a) $x \equiv 23 \pmod{45}$
(b) $x \equiv 47 \pmod{84}$
(c) $x \equiv 42 \pmod{104}$
(d) $x \equiv 103 \pmod{180}$

(2) $x \equiv 14 \pmod{18}$

- 2 (1) 2 (2) 4 (3) 6 (4) 12

- 3 (1) $f_\alpha(x) = x^2 + 6x + 4$ (2) $f_\alpha(x) = 3x^2 - 11x + 5$ (3) $f_\alpha(x) = 8x^3 + 12x^2 + 6x - 1$
(4) $f_\alpha(x) = x^4 - 60x^2 + 36$

4 (1) $d(x) = 1, a(x) = \frac{1}{7}(-4x^2 + x + 2), b(x) = \frac{1}{7}(4x - 9)$

(2) $d(x) = x + 2, a(x) = \frac{1}{4}(-2x^2 + 2x + 4), b(x) = \frac{x}{2}$

- 5 (1) $\frac{2}{11}\alpha - \frac{3}{11}$ (2) $\frac{1}{11}\alpha + \frac{7}{11}$ (3) $\frac{1}{12}\alpha^2 + \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{4}$