期末試験問題

- 問題文を良く読み, 解答を別紙「解答用紙」に記入しなさい.
- 答えには下線をひく などし, わかりやすくすること.

$\boxed{1}$ 次の連立合同方程式を解け. ただし答えは $x \equiv a \mod n$ の形に表すこと.

(1) $\begin{cases} x & \equiv 3 \mod 4 \\ x & \equiv 17 \mod 23 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x & \equiv 2 \mod 3 \\ x & \equiv 5 \mod 7 \\ x & \equiv 4 \mod 10 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x & \equiv 7 \mod 8 \\ x & \equiv 11 \mod 12 \end{cases}$

$\boxed{2}$ 次の体の拡大 L/K の拡大次数 $[L:K]$ を求めよ.

(1) $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$, $K = \mathbb{Q}$

(2) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$, $K = \mathbb{Q}$

(3) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[8]{2})$, $K = \mathbb{Q}$

$\boxed{3}$ 次の元 α の有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $f_\alpha(x)$ を求めよ.

(1) $\alpha = \dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$ (2) $\alpha = \sqrt{5} - \sqrt{3}$

$\boxed{4}$ 多項式 $f(x) = x^3 + x + 1$ と $g(x) = x^2 + x + 1$ に対し, $f(x)$ と $g(x)$ の最大公約式 $d(x) = \mathrm{GCD}(f(x), g(x))$ を求めよ. また

$$f(x)a(x) + g(x)b(x) = d(x)$$

を満たす多項式 $a(x), b(x)$ を 1 組与えよ.

$\boxed{5}$ 有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数拡大 $\mathbb{Q}(\alpha)$ において, 次の α の有理式 $f(\alpha)$ を α の多項式の形で表せ. ただし, 多項式の次数は拡大次数 $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ 未満で答えよ.

(1) $\alpha = 1 - \sqrt{2}$, $\quad f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2 + \alpha}$

(2) $\alpha = \sqrt[3]{2}$, $\quad f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$

(3) α は方程式 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ の解 (の一つ), $\quad f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$

[0]※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2016/fg.html

略解：

$\boxed{1}$ (1) $x \equiv 63 \mod 92$ (2) $x \equiv 194 \mod 210$ (3) $x \equiv 23 \mod 24$

$\boxed{2}$ (1) 4 (2) 4 (3) 8

$\boxed{3}$ (1) $f_\alpha(x) = x^2 - 5x + 1$ (2) $f_\alpha(x) = x^4 - 16x^2 + 4$

$\boxed{4}$ $d(x) = 1, \quad a(x) = \dfrac{-x+1}{3}, \quad b(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{3}$

$\boxed{5}$ (1) $\dfrac{3\alpha - 7}{2}$ (2) $\dfrac{\alpha^2 - \alpha + 1}{3}$ (3) $-\alpha^3 - \alpha$