

中間レポート問題

- 裏面の注意を良く読んだ上で, 以下の問題の解答をレポート用紙 (A4 サイズ・ホッチキスなどで閉じる) にまとめ, **2016年12月16日 12月23日 (金)16:00** までに理学部事務室のレポートボックスに提出しなさい.

1 (1) 次の連立合同方程式を解け.

$$(a) \begin{cases} x \equiv 4 \pmod{8} \\ x \equiv 3 \pmod{11} \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv -3 \pmod{7} \\ x \equiv 4 \pmod{8} \end{cases}$$

(2) a, b を整数とする. 連立合同方程式

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{6} \\ x \equiv b \pmod{9} \end{cases}$$

に関し,

- (c) 解が存在する為の条件を a, b を用いて表し,
 (d) その条件のもとで, 全ての解を求めよ.

なお (c) の解答では, 求めた条件が解が存在する為に必要かつ十分であることを示すこと.

2 3元体 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$ の元を成分とする 2 次行列の集合

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \{0, 1, 2\}, a \not\equiv 0 \pmod{3} \right\}$$

は, 行列の積

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 \pmod{3} & a_1 b_2 + b_1 d_2 \pmod{3} \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 \pmod{3} & c_1 b_2 + d_1 d_2 \pmod{3} \end{pmatrix}$$

に関して (乗法) 群になる.

- G の元を全て求めよ.
- G の群表を計算せよ. (G の元に適当に記号で名前を付けて答えよ.)
- G の部分集合 N を, $N = \{A \in G \mid \det(A) = 1\}$ により定める. N が G の部分群になることを示し, N と同型な群の例を 1 つ挙げよ.
- 剰余群 G/N が加法群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型であることを示せ.
ヒント: 準同型写像 $f: G \rightarrow (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times, A \mapsto \det(A)$ に対し, 準同型定理を用いる. $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であることを注意する.
- G と同型な群の例を 1 つ挙げよ.

問題は裏面にもあります.

3 (1) $\mathbb{Q}(\omega) = \mathbb{Q}[\omega]$ を示せ. ただし, ω は 1 の原始 3 乗根, すなわち $\omega = (-1 + \sqrt{3}i)/2$ とする.

(2) 有理数体 \mathbb{Q} の代数拡大 $\mathbb{Q}(\alpha)$ において, 次の α の有理式 $f(\alpha)$ を α の多項式の形で表せ. ただし, 多項式の次数は拡大次数 $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ 未満で答えよ.

(a) $\alpha = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, \quad f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 - \alpha + 2}{\alpha + 1}$

(b) $\alpha = \sqrt[3]{3}, \quad f(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2 - 2}$

—— 注意点 (良く読んで解答すること) ——

- 他人のレポートを明らかに写したと判断される場合には, 写したものの写させたものを問わず, 評価を 0 点 とする.
- 問題を他の受講者と共同で考え, 解答を作成する場合には, 必ず解答を理解した上で, 自分自身で答案を作成すること. (後日答案内容に関する問合せをする場合もある.)
- 図書・文献・Webなどを参照し解答する場合には, 参照した図書やページを明らかにすること.
- 締切は厳守すること. 締切を過ぎて提出されたレポートはいかなる理由があっても受け取りません.

⁰※お知らせ：講義に関する情報は次のページを参照：<http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2016/fg.html>