線形代数 (SP), 期末試験問題＆解答用紙

2016/1/18 担当：那須

学籍番号 | | | | | | | | 　氏名 　　　　点数

- 問題用紙は 1 枚, 裏表合わせて 6 問ある. **解答は問題用紙の余白に書くこと**.
- 答えには下線を引くなど し, わかりやすくすること. 途中計算の無い解答, 字の粗末な解答, 答えがどれか判別つかない解答は, 減点の対象になる場合がある.

$\boxed{1}$ 次の連立 1 次方程式を掃き出し法を用いて解け. ただし方程式の解が無い場合には, 「解無し」と答えよ.

(1) $\left(\begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 7 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \end{array}\right)$

(2) $\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right)$

(3) $\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 2 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$

$\boxed{2}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ に対し, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値 λ をすべて求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則な正方行列 P を 1 つ与えよ. なお答えは, 「$P = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ のとき, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ となる」の形で答えること.

$\boxed{3}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ に対し, 以下の問いに答えよ.

(1) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正方行列 P を一つ与えよ (答え方は$\boxed{2}$(2) と同じ).

(2) 自然数 n に対し, べき乗 A^n を求めよ.

$\boxed{4}$ 次の連立方程式が解を持つように定数 a の値を定め, 連立方程式を解け.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$\boxed{5}$ 次の$\boxed{}$に入る複素数を答えよ. ただし$\boxed{ア}$の虚部が正になるように答えること：行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値は$\boxed{ア}$と$\boxed{イ}$であり, $\boxed{ア}$に対する固有ベクトルは $\mathbf{x} = t_1 \begin{pmatrix} \boxed{ウ} \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t_1 \neq 0)$ となり, $\boxed{イ}$に対する固有ベクトルは $\mathbf{x} = t_2 \begin{pmatrix} \boxed{エ} \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t_2 \neq 0)$ となる.

答え：ア)　　　　　イ)　　　　　ウ)　　　　　エ)

$\boxed{6}$ (1) n 次正方行列 A の固有多項式が

$$|A - \lambda E| = (-1)^n(\lambda - a_1)^{m_1} \ldots (\lambda - a_k)^{m_k}, \qquad (\text{ただし } i \neq j \text{ のとき } a_i \neq a_j)$$

のように1次式の積に分解するとき, A が対角化可能であるための必要十分条件を書け.

(2) 次の行列の中で対角化が可能でないものを全て選び, 空欄の中に番号を記入せよ. なお, 解答は答え (番号) のみで良い.

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,　(3) $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$,　(4) $\begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$,

(5) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,　(6) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,　(7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,　(8) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

答 $\boxed{}$

[0]講義に関する情報は次のサイトを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/lasp.html