線形代数 (SP), 演習問題

2015/11/26 担当：那須

$\boxed{1}$ 次の行列を行基本変形により階段行列に変形し, 階数を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ 次の連立 1 次方程式を基本変形 (掃き出し法) を用いて解け.

(1) $\left(\begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{array}\right)$ (2) $\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 4 & -1 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

$\boxed{3}$ 次の連立 1 次方程式の解の個数がどのようになっているか調べよ.
答えは「1：解無し」,「2：解は無限個ある」,「3：解は唯一」の 3 つの中から選択せよ.

(1) $\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$ (2) $\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 0 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & 13 & 5 & 1 \end{array}\right)$ (3) $\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\boxed{4}$ 次の連立 1 次方程式が解をもつための a, b の条件を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

ポイント!

連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (A は $m \times n$ 行列, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$) において, $\tilde{A} = (A|\mathbf{b})$ を拡大係数行列とする. 方程式に解が存在するための必要十分条件は,

$$\operatorname{rank} \tilde{A} = \operatorname{rank} A$$

と表される. また, 方程式に解が存在するとき (従って上の等式が成り立つとき), ただ一つの解が存在するための必要十分条件は,

$$n = \operatorname{rank} A$$

と表される. ただし, n は連立方程式の変数 $(x, y, z, \ldots)$ の個数を表す.

---

[0]解答：

$\boxed{1}$ 基本変形は省略. 階数 (rank) のみ記す. (1) 2 (2) 3 (3) 3

$\boxed{2}$ (1) $x = -1, y = 4$ (2) $x = \dfrac{1-5t}{2}$, $y = 1 - 2t$, $z = t$ (t は任意)

$\boxed{3}$ (1) 解なし (2) 解は無限個ある (3) 解は唯一

$\boxed{4}$ (1) $a + 2b = 1$ (2) $a \neq 2$

[0]※この講義に関する情報は次の Web サイトを参照すること. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/lasp.html