線形代数２, 期末テスト準備問題２

2015/7/13 担当：那須

- 解答が講義ホームページに掲載してあります (脚注参照). 各自で答え合わせをしてください.

$\boxed{1}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & -1 & 4 & 11 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -7 \\ 2 & -2 & 1 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ により定義される線形写像 $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ に対し,

(a) f の核 $\ker f$ の次元と 1 組の基底,　　(b) f の像 $\mathrm{im}\, f$ の次元と 1 組の基底,

を求めよ. ただし, $\mathrm{im}\, f$ の基底は A の列ベクトルから選ぶものとする. A の 1 列目から順に $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots$ とし, 基底は列ベクトルの部分集合 $\{\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}\}$ $(i_1 < \cdots < i_r)$ として表すこと.

$\boxed{2}$ (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値 λ を全て求めよ.

(2) A の固有ベクトル $\mathbf{x}$ を全て求めよ.

$\boxed{3}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ に対し, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値を全て求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則な正方行列 P を 1 つ与えよ. (A を対角化せよ.)

(3) 自然数 n に対し, A のべき A^n を求めよ.

$\boxed{4}$ 次の行列の中で対角化が<u>可能でないもの</u>を<u>全て</u>選べ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$,　(2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,　(3) $\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$,　(4) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,　(5) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,　(7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,　(8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{5}$ $\mathbb{R}^2$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$ と $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に関して, 線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ の表現行列を求めよ.

$\boxed{6}$ (**NEW!**) 2 次以下の実係数多項式のなすベクトル空間 $V = \mathbb{R}[x]_2$ 上の線形変換 T を

$$T(f(x)) = f(1-x)$$

により定める.

(1) V の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する T の表現行列 A を求め, T の固有値 λ を全て求めよ.

(2) T の各固有値 λ に対する固有ベクトルを求めよ.

---

[0]講義に関する情報を次のウェブサイトに置いておく. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/la2.html