

学生証番号 氏名 点数

- 問題用紙は1枚, 裏表合わせて全部で5問ある. 解答は問題用紙の余白に書くこと.
- 答えには下線を引くなどし, わかりやすくすること. 途中計算の無い解答, 字の粗末な解答, 答えがどれか判別つかない解答は, 減点の対象になる場合がある.

1 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & -3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ により定義される線形写像 $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ に対し,

(a) f の核 $\ker f$ の次元と1組の基底, (b) f の像 $\text{im } f$ の次元と1組の基底,

を求めよ. ただし, $\text{im } f$ の基底は A の列ベクトルから選ぶものとする. A の1列目から順に $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots$ とし, 基底は列ベクトルの部分集合 $\{\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}\}$ ($i_1 < \dots < i_r$) として表すこと.

2 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値 λ を全て求めよ.

(2) A の固有ベクトル \mathbf{x} を全て求めよ. (どの固有値に対する固有ベクトルかを明らかにすること.)

3 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ に対し, 以下の問いに答えよ.

(1) A の固有値を全て求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則な正方行列 P を 1 つ与えよ. なお答えは, 「 $P = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ のとき, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ となる」の形で答えること. (括弧の中には行列が入る.)

(3) 自然数 n に対し, A のべき A^n を求めよ.

4 (1) 正方行列 A の固有多項式が

$$|tE - A| = (t - a_1)^{m_1} \dots (t - a_k)^{m_k}, \quad (\text{ただし } i \neq j \text{ のとき } a_i \neq a_j)$$

のように 1 次式の積に分解するとき, A が対角化可能であるための必要十分条件を書け.

(2) 次の行列の中で対角化が可能でないものを全て選び, 空欄の中に番号を記入せよ. なお, 解答は答え (番号) のみで良い.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, (3) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, (4) $\begin{pmatrix} 8 & -11 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$,
(5) $\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, (7) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, (8) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

答

5 \mathbb{R}^3 の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ と \mathbb{R}^2 の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に関して, 線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ の表現行列を求めよ.