線形代数 2, テスト準備問題略解

2015/5/21 担当：那須

1 (1) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 7 \\ 11 & -13 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ (4) 2

2 (1) $x = -1, y = 1, z = -1, w = -2$

(2) $x = \dfrac{1}{2}(t+1),\ y = -1-t,\ z = \dfrac{1}{2}(t+1),\ w = t$ (t は任意)

3 (1) $a = -5,\quad x = \dfrac{1}{5}(-17t-7),\ y = \dfrac{1}{5}(t+11),\ z = t$ (t は任意)

(2) $a = 3,\quad x = -1, y = 5, z = 7$

4 (1) 3 (2) 20 (3) $(x-y)(y-z)(z-x)$ (4) $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

5 (1) (a) $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $|A| = 3,\qquad A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(2) (a) $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 9 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ (b) $|A| = 7,\qquad A^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -5 & 9 \\ 3 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

6 (1) (i) W が零ベクトル $\mathbf{0}$ を含む.

(ii) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ ならば, $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in W$.

(iii) $\mathbf{x} \in W,\ c \in \mathbb{R}$ ならば, $c\mathbf{x} \in W$.

(2) (a) 部分空間 (b) 部分空間でない (c) 部分空間

(d) 部分空間 (e) 部分空間でない (f) 部分空間

7 (1) 一次独立 (2) 一次従属 (3) 一次独立 (4) 一次独立 (5) 一次従属

8 解答) $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 \end{pmatrix}$ とおけば, A は基本変形により

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -10 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 17 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[④+2\times①]{②-2\times①,③+3\times①} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[④+2\times②]{①+②,③+②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[④+2\times③]{①-③,②-2\times③} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

と簡約化される. 最後の行列を $B = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_4 & \mathbf{b}_5 \end{pmatrix}$ とおくと, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ に対し,

$$A\mathbf{x} = 0 \Longleftrightarrow B\mathbf{x} = 0$$

が成り立ち, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5$ の間の 1 次関係と $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_5$ の間の 1 次関係は等しい. $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_4$ は 1 次独立であり, $\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_5$ は,

$$\mathbf{b}_3 = -3\mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2$$
$$\mathbf{b}_5 = -2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_4$$

と表せる. よって,

(1) $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5$ の1次独立な最大個数は3である.

(2) 3個の1次独立なベクトルは前から順に $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ となる.

(3) $\mathbf{a}_3$ と $\mathbf{a}_5$ は $\mathbf{a}_3 = -3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5 = -2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4$ と表される.

$\boxed{9}$ 解答) 係数行列を A とおけば, 基本変形により

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 2 & 5 & 8 \\ -2 & -4 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[③+2\times①]{②+①} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[③+2\times②]{①+②} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[②-4\times③]{①-3\times③} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と簡約される. 従って, 方程式の一般解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s+t \\ s \\ -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s, t \text{ は任意の実数})$$

で与えられる. ここで, $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は W を生成し, 明らかに1次独立である. よって $\dim W = 2$ で $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ が W の1組の基底となる.

---

[0] 講義に関する情報を次のウェブサイトに置いておく. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/la2.html