# 線形代数２，期末テスト準備問題１略解

2015/7/9 担当：那須

- 詳細な解答 (解答の書き方) については, これまでの小テストを参考にしてください.

$\boxed{1}$ 行列 $A$ は

$$A \xrightarrow[④-3\times①]{②+2\times①,③-2\times①} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[④+②]{③-②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③\leftrightarrow④} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[④-4\times③]{①+③,②+3\times③} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

と簡約化される. 従って連立方程式 $A\mathbf{x} = 0$ の解は,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} s-2t \\ -3s-t \\ s \\ t \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \text{ は任意})$$

で与えられる. よって $\ker f$ の次元は 2 に等しく, $\ker f$ の基底として $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ が取れる.

また簡約化された階段行列により, $\mathrm{im}\, f$ の次元は $\mathrm{rank}\, A = 3$ に等しく, 基底として $A$ の $1, 2, 4$ 列目が取れ, 基底は $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$ となる.

$\boxed{2}$ (1) $\lambda = 2, 1, 0$ (2) $\lambda = 2$ のとき, $\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(t \neq 0)$. $\lambda = 1$ のとき, $\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(t \neq 0)$.

$\lambda = 0$ のとき, $\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(t \neq 0)$.

$\boxed{3}$ (1) $\lambda = 3, 2$ (2) $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる.

(3) $A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3\cdot 2^{n+1} - 2\cdot 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3\cdot 2^n - 2\cdot 3^n \end{pmatrix}$

$\boxed{4}$ (1) $n - \mathrm{rank}(A - a_iE) = m_i$ が任意の $i = 1, \ldots, k$ に対し成立する. (2) <u>答え：(1) (4) (7)</u>

$\boxed{5}$ $\begin{pmatrix} -8 & 4 & 3 \\ 14 & -7 & -5 \end{pmatrix}$

---

[0]講義に関する情報を次のウェブサイトに置いておく. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/la2.html