線形代数 2, 中間試験問題＆解答用紙

2015/5/25 担当：那須

学生証番号 | | | | | | | | 　氏名 　　点数

- 問題用紙は 1 枚, 裏表合わせて全部で 7 問ある. 解答は問題用紙の余白に書くこと.
- 答えには下線を引くなどし, わかりやすくすること. 字の粗末な解答, 答えがどれか判別つかない解答は, 減点の対象になる場合がある.

$\boxed{1}$ 次の行列の積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^3$

$\boxed{2}$ 掃き出し法を用いて, 次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ 次の行列式を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$\boxed{4}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対し, 以下の問いに答えよ.

(1) A の (i,j) 余因子を Δ_{ij} で表す. 次の行列 B を求めよ：$B = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$

(2) A^{-1} を求めよ.

$\boxed{5}$ 次の各ベクトルの組が 1 次独立かどうか調べ, 1 次独立なら「独立」を, そうでないなら「従属」を解答欄に記入せよ.

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ (2) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ (3) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

解答欄：(1) (2) (3)

$\boxed{6}$ $\mathbb{R}^4$ のベクトルを $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) 1 次独立なベクトルの最大個数 r を求めよ.

(2) r 個の 1 次独立なベクトルを $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_4$ のうち, 前から順に求め, 他のベクトルをそれらの 1 次結合として表せ.

$\boxed{7}$ (1) V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする. V の n 本のベクトルからなる集合 $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\} \subset V$ が V の基底であることの定義を述べよ.

(2) $\mathbb{R}[x]_2$ を実数を係数とする 2 次以下の多項式全体のなすベクトル空間とする.

(a) $f_1 = -1 + 3x + x^2, f_2 = 1 + 2x + 3x^2, f_3 = 1 + x + 2x^2$ とする. $\{f_1, f_2, f_3\}$ が $\mathbb{R}[x]_2$ の基底になることを示せ.

(b) 前問の f_1, f_2, f_3 に対し, 次を満たす実数 a, b, c の値を求めよ.

$$1 + 2x + x^2 = af_1 + bf_2 + cf_3$$

[0] 講義に関する情報を次のウェブサイトに置いておく. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/la2.html