

□1 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に関する以下の問題に答えよ。(問題は裏にもあるので注意!) (各1点)

(1) A の固有値を全て求めよ.

$$\text{解答) } |tE - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -1 & t \end{vmatrix} = (t-1)t - (-2)(-1) = t^2 - t - 2 = (t+1)(t-2).$$

よって A の固有値は $\lambda = -1, 2$.

(2) A を対角化せよ. すなわち, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を1つ与えよ. 解答は「 $P = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ のとき, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ となる」の形で答えること.

解答)

• $\lambda = -1$ のとき,

$$A + E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A の固有ベクトル (の1つ) は, $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

• $\lambda = 2$ のとき,

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A の固有ベクトル (の1つ) は, $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

よって $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる.

(3) A^n ($n = 0, 1, \dots$) を求めよ.

解答)

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n + 2^{n+1} & 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^{n+2} + 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(4) $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ ($n = 0, 1, \dots$) の一般項 a_n を求めよ.

(ヒント : $\mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$ と置くと, $\mathbf{a}_n = A\mathbf{a}_{n-1} = \dots = A^{n-1}\mathbf{a}_1 = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$)

解答)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_n &= A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \\ (-1)^n + 2^{n-1} & 2(-1)^{n+1} + 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} + 2^n + 2(-1)^n + 2^n \\ (-1)^n + 2^{n-1} + 2(-1)^{n+1} + 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -(-1)^n + 2(-1)^n + 2 \cdot 2^n \\ -(-1)^{n+1} + 2(-1)^{n+1} + 2 \cdot 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n + 2^{n+1} \\ (-1)^{n-1} + 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって求める数列 a_n の一般項は,

$$a_n = \frac{1}{3} \{(-1)^n + 2^{n+1}\}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$