

1 2次以下の実係数多項式のなすベクトル空間 $V = \mathbb{R}[x]_2$ 上の線形変換 T を $T(f(x)) = f(1-2x)$ により定める.

(1) V の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する T の表現行列 A を求め, T の固有値 λ を全て求めよ. (表現行列 A : 1点, 固有値 λ : 3点)

解答) $T(1) = 1, T(x) = 1 - 2x, T(x^2) = (1 - 2x)^2 = 1 - 4x + 4x^2$ より,

$$\begin{pmatrix} T(1) & T(x) & T(x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

よって, 求める T の表現行列は $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ である. A の固有多項式は,

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ 0 & t+2 & 4 \\ 0 & 0 & t-4 \end{vmatrix} = (t-1)(t+2)(t-4).$$

従って T の固有値は $\lambda = 1, -2, 4$ である.

(2) T の各固有値 λ に対する固有ベクトルを求めよ. (3点)

解答)

• $\lambda = 1$ のとき,

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{基本変形}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A - E)\mathbf{x} = 0$ を解けば, $\mathbf{x}_1 = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($t_1 \in \mathbb{R}$). 従って, 固有ベクトルは $f_1(x) = t_1$ ($t_1 \neq 0$).

• $\lambda = -2$ のとき,

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{基本変形}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A + 2E)\mathbf{x} = 0$ を解けば, $\mathbf{x}_2 = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ($t_2 \in \mathbb{R}$). 従って, 固有ベクトルは $f_2(x) = t_2(1 - 3x)$

($t_2 \neq 0$).

• $\lambda = 4$ のとき,

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{基本変形}} \begin{pmatrix} 9 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A - 4E)\mathbf{x} = 0$ を解けば, $\mathbf{x}_3 = t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$ ($t_3 \in \mathbb{R}$). 従って, 固有ベクトルは $f_3(x) = t_3(1 - 6x + 9x^2) = t_3(1 - 3x)^2$ ($t_3 \neq 0$).