

1 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ の固有多項式 $g_A(t) = |tE - A|$ を計算し, A の固有値 λ を全て求めよ.

(2点)

解答) A の固有多項式は

$$\begin{aligned} g_A(t) = |tE - A| &= \begin{vmatrix} t-8 & -15 \\ 2 & t+3 \end{vmatrix} \\ &= (t-8)(t+3) - (-15) \cdot 2 \\ &= t^2 - 5t + 6 \\ &= (t-2)(t-3). \end{aligned}$$

従って A の固有値は $\lambda = 2, 3$.

(2) A のそれぞれの固有値に対し, 固有ベクトル \mathbf{x} を求めよ. (2点)

解答)

- $\lambda = 2$ のとき,

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2E)\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ を解けば, 固有ベクトルは } \mathbf{x}_1 = t_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t_1 \neq 0).$$

- $\lambda = 3$ のとき,

$$A - \lambda E = A - 5E = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - 5E)\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ を解けば, 固有ベクトルは } \mathbf{x}_2 = t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_2 \neq 0).$$

2 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ の固有多項式 $g_A(t) = |tE - A|$ を計算し, A の固有値 λ を全て求めよ.

(3点)

解答) A の固有多項式は,

$$\begin{aligned} g_A(t) = |tE - A| &= \begin{vmatrix} t-2 & 1 & -3 \\ -3 & t+2 & -3 \\ 1 & -1 & t+2 \end{vmatrix} \\ &= (t-2)(t+2)^2 - 3 - 9 + 3(t+2) - 3(t-2) + 3(t+2) \\ &= (t^2 - 4)(t+2) + 3t + 6 \\ &= t^3 + 2t^2 - 4t - 8 + 3t + 6 \\ &= t^3 + 2t^2 - t - 2 \\ &= (t-1)(t+1)(t+2). \end{aligned}$$

従って A の固有値は $\lambda = -2, -1, 1$.