

- ① 行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  の固有値  $\lambda$  と固有ベクトル  $\mathbf{x}$  を求めよ. (3点: 固有値1点, 固有ベクトル2点)

解答)  $A$  の固有多項式は

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-3 & -2 \\ -2 & t-3 \end{vmatrix} = (t-3)^2 - (-2)^2 = t^2 - 6t + 5 = (t-1)(t-5).$$

従って  $A$  の固有値は  $\lambda = 1, 5$ .

- $\lambda = 1$  のとき,

$$A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

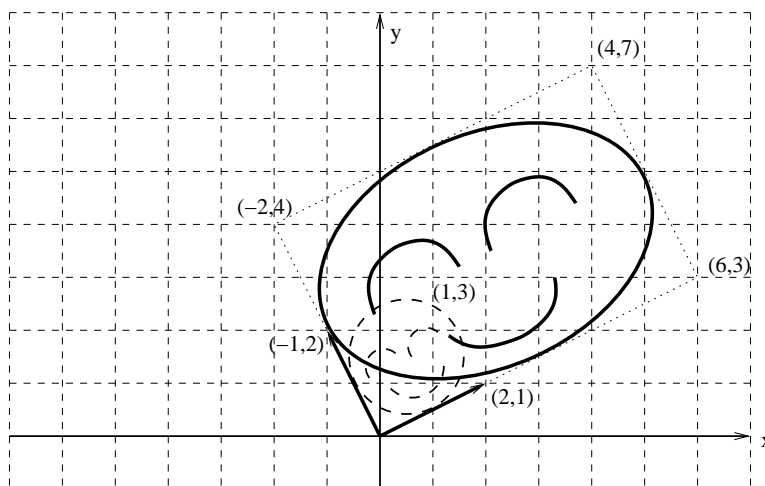
$(A - E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  を解けば, 固有ベクトルは  $\mathbf{x}_1 = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ( $t_1 \neq 0$ ).

- $\lambda = 5$  のとき,

$$A - \lambda E = A - 5E = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A - 5E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  を解けば, 固有ベクトルは  $\mathbf{x}_2 = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ( $t_2 \neq 0$ ).

- ② 2次正方行列  $A$  が  $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  かつ  $A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  を満たすとする. このとき  $A$  の定める線形写像  $T$  により, 下の図形 (ニコニコマーク) はどのような図形に写されるか? 概形を描け. (1点)



ポイント!

それぞれの固有ベクトルの方向に, 固有値  $\lambda$  倍された図形を描く. つまり  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  方向に3倍,  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  方向に2倍された図形を描く.