

1 次の線形写像の与えられた基底に関する表現行列を求めよ. (各1点)

$$(1) f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 \text{の基底} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathbb{R}^2 \text{の基底} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

解答) \mathbb{R}^3 の基底の変換行列は, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, \mathbb{R}^2 の基底の変換行列は, $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ と

なる. よって求める表現行列は

$$\begin{aligned} Q^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} P &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -10 & -3 & 4 \\ 14 & 3 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(2) f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2 \text{の基底} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathbb{R}^3 \text{の基底} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

解答) \mathbb{R}^2 の基底の変換行列は, $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, \mathbb{R}^3 の基底の変換行列は, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ と

なる. よって求める表現行列は

$$\begin{aligned} Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$