線形代数 2, 第 12 回小テスト解答

2015/6/4 担当：那須

$\boxed{1}$ 線形写像 $f : V \to W$ に対し, f の核 ($\ker f$) と f の像 ($\mathrm{im}\, f$) の定義を書け. (1 点)

$\ker f := \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$

$\mathrm{im}\, f := \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in V\}$

$\boxed{2}$ 次の線形写像 $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ について, (1) $\ker f$ の次元と 1 組の基底, (2) $\mathrm{im}\, f$ の次元と 1 組の基底を求めよ. (各 2 点)

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解答)　行列 A は

$$A \xrightarrow[④-①]{②-①,③+①} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[④-②]{①-②} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[④-③]{①-5\times③,②+3\times③} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[③\times(-1)]{②\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

と簡約化される. 従って連立方程式 $A\mathbf{x} = 0$ の解は,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} s + 10t \\ s \\ 5t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \text{ は任意})$$

で与えられる. よって $\ker f$ の次元は 2 に等しく, $\ker f$ の基底として $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ が取れる.

また簡約化された階段行列により, $\mathrm{im}\, f$ の次元は $\mathrm{rank}\, A = 3$ に等しく, 基底として A の $1, 3, 4$ 列目である $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ が取れる.

[1]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/la2.html