線形代数 2, 第 11 回小テスト解答

2015/6/1 担当：那須

1 (1) $f : V \to W$ をベクトル空間 V からベクトル空間 W への写像とする. f が線形写像であるための必要充分条件を書け. (1 点)

(i) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in V$ に対し, $f(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}')$ が成り立つ.

(ii) 任意の $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in V$ に対し, $f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ が成り立つ.

(2) 次の写像が線形写像かどうか調べ, 解答欄に線形写像なら○を, そうでなければ×を記入せよ. (答えのみで良い) (各 1 点)

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (3x, 4y)$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = (2x + 3y, -x + 4y, 5x - 2y)$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + 1, y - 1)$

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f$ は原点 $\mathbf{0}$ の周りの角度 θ の回転

答え：(a) ○ (b) ○ (c) × (d) ○

2 右の線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ について,

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) f の核 $(\ker f)$ の次元と 1 組の基底,

(2) f の像 $(\mathrm{im}\, f)$ の次元と 1 組の基底

を求めよ. (各 2 点)

解答) A は基本変形により

$$A \xrightarrow[③+①]{②-3\times①} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{②\times 1/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[③-②]{①-②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と簡約化される. 従って連立方程式 $A\mathbf{x} = 0$ の解は,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3s + 5t \\ s - 4t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \text{ は任意})$$

で与えられる. よって $\ker f$ の次元は 2 に等しく, $\ker f$ の基底として $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ が取れる.

また簡約化された階段行列により, $\mathrm{im}\, f$ の次元は $\mathrm{rank}\, A = 2$ に等しく, 基底として A の 1 列目と 2 列目である $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ が取れる.

[1] ※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/la2.html