

1

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- (1) 1次独立なベクトルの最大個数  $r$  を求めよ. (1点)  
 (2)  $r$  個の1次独立なベクトルを前の方から順に求めよ. (1点)  
 (3) 他のベクトルを(2)のベクトルの1次結合で書き表せ. (1点)

解答)  $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4 \ \mathbf{a}_5)$  とおき, 階段行列に基本変形する.

$$A \begin{array}{l} \xrightarrow{\substack{\textcircled{2}+\textcircled{1}, \textcircled{3}-\textcircled{1} \\ \textcircled{4}-2\times\textcircled{1}}} \\ \xrightarrow{\substack{\textcircled{1}-\textcircled{2} \\ \textcircled{4}-\textcircled{2}}} \\ \xrightarrow{\substack{\textcircled{1}-\textcircled{3}, \textcircled{2}+\textcircled{3} \\ \textcircled{4}-\textcircled{3}}} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = B$$

最後の行列を  $B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3 \ \mathbf{b}_4 \ \mathbf{b}_5)$  とおくと,  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5$  の間の1次関係と  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_5$  の間の1次関係は等しい.  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$  は1次独立であり,  $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_5$  は,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2 &= -\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_5 &= 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4 \end{aligned}$$

と表せる. よって,

- (1)  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5$  の1次独立な最大個数は3,  
 (2)  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  は1次独立,  
 (3)  $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_5 = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4$