線形代数 2, 第 5 回小テスト解答

2015/4/27 担当：那須

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V の部分集合 W が部分空間であるための必要十分条件を書け. (1 点)

(i) $\mathbf{0}$ が W に含まれる.

(ii) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ ならば, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$ が成り立つ.

(iii) $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in W$ ならば, $a\mathbf{x} \in W$ が成り立つ.

((i),(ii),(iii) の順番は任意)

$\boxed{2}$ 次の部分集合 W はベクトル空間 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2_{(x,y)}$ の部分空間となるかどうか答えよ. (各 1 点)

(1) $W = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x - y = 1\right\}$

(2) $W = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = y = 0\right\}$

(3) $W = \{(0,0)\}$

(4) $W = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\right\}$

(5) $W = \left\{\mathbf{x} = (t, 2t) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}$

(6) $W = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1\right\}$

解説）(1) $\mathbf{0} = (0,0)$ を含まない.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおけば, $A\mathbf{x} = 0$ の形

(3) (2) と同じ集合である.

(4) $\mathbf{x} = (1,0)$ のとき, $\mathbf{x} \in W$, $2\mathbf{x} \notin W$

(5) $W = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y - 2x = 0\right\}$ と表せる.

(6) W は原点中心の半径 1 の円.

答え：(1) 部分空間でない (2) 部分空間 (3) 部分空間
答え：(4) 部分空間でない (5) 部分空間 (6) 部分空間でない

$\boxed{3}$ 次の部分集合 W はベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_2$ の部分空間となるかどうか答えよ. ただし, $\mathbb{R}[x]_2$ は実係数の 2 次以下の多項式のベクトル空間を表す. (各 1 点)

(1) $W = \left\{f(x) \in \mathbb{R}[x]_2 \;\middle|\; f(0) = 1, f(1) = 0\right\}$

(2) $W = \left\{f(x) \in \mathbb{R}[x]_2 \;\middle|\; f(1) = 0, f(2) = 0\right\}$

(3) $W = \left\{f(x) \in \mathbb{R}[x]_2 \;\middle|\; f'(2) = 0, f(3) = 0\right\}$

(4) $W = \left\{f(x) \in \mathbb{R}[x]_2 \;\middle|\; xf'(x) = f(x)\right\}$

解説）(1) $\mathbf{0}$ (多項式 0) を含まない.

(2) $f(x), g(x) \in W$ のとき,

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0, \quad (f+g)(2) = f(2) + g(2) = 0 + 0 = 0$$

より $f(x) + g(x) \in W$. 同様に $a \in \mathbb{R}$, $f(x) \in W$ のとき $af(x) \in W$. W は 0 を含むので, W は部分空間の条件を満たす.

(3) (2) と同様に部分空間であることが示せる.

(4) $f(x), g(x) \in W$ のとき,

$$x(f(x) + g(x))' = xf'(x) + xg'(x) = f(x) + g(x)$$

より $f(x) + g(x) \in W$. 同様に $a \in \mathbb{R}$, $f(x) \in W$ のとき $af(x) \in W$. W は 0 を含むので, W は部分空間の条件を満たす.

答え：(1) 部分空間でない (2) 部分空間 (3) 部分空間 (4) 部分空間

[0]※この講義に関する情報はホームページを参照. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/la2.html