線形代数１, 期末テスト準備問題解答 2016/1/7 担当：那須

学生証番号 | | | | | | | | 氏名 [ ] 点数 [ ]

$\boxed{1}$ 次の行列式を計算せよ.

(1) $$\begin{vmatrix} 7 & -9 \\ 31 & -37 \end{vmatrix} \overset{\text{②}-4\times\text{①}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 7 & -9 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7\times(-1)-(-9)\times 3 = 20$$

(2) $$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{①}-3\times\text{③}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -7 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\boxed{2}\text{で展開}}{=\!=\!=} (-1)\times\left(-\begin{vmatrix} -7 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}\right)$$
$$= -7\times 5-(-2)^2 = -39$$

(3) $$\begin{vmatrix} 95 & 96 & 97 \\ 96 & 97 & 99 \\ 97 & 98 & 99 \end{vmatrix} \underset{\text{②}-\text{①}}{\overset{\text{③}-\text{①}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 95 & 96 & 97 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\boxed{2}-\boxed{1}}{\overset{\boxed{3}-\boxed{1}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 95 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\overset{\boxed{2}\text{で展開}}{=\!=\!=} -1\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\times(-2) = 2$$

(4) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{④}-2\times\text{①}}{\overset{\text{③}-\text{①}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{\boxed{2}\text{で展開}}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$
$$\overset{\text{①}-\text{②}}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6\times 1\times 3 = -18$$

$\boxed{2}$ 4 次行列 $A=(a_{ij})$ の行列式は $|A| = \displaystyle\sum_{\varphi:\ 4\text{ 次置換}} \mathrm{sgn}(\varphi)a_{1\varphi(1)}a_{2\varphi(2)}a_{3\varphi(3)}a_{4\varphi(4)}$ により定義される. (ただし総和 Σ は 24 $(=4!)$ 個の全ての 4 次置換 $\varphi_1,\dots,\varphi_{24}$ に関する和を取る.)

(1) $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき, 符号 $\mathrm{sgn}(\varphi)$ を求めよ.

解答) φ は偶置換 (あみだくじを書いて確認) であるので $\mathrm{sgn}(\varphi)=1$.

(2) 前問の φ と $A = \begin{pmatrix} a & b & f & 1 \\ c & e & 2 & 7 \\ d & 3 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ に対し, $\mathrm{sgn}(\varphi)a_{1\varphi(1)}a_{2\varphi(2)}a_{3\varphi(3)}a_{4\varphi(4)}$ を計算せよ.

解答)

$$\begin{aligned} \mathrm{sgn}(\varphi)a_{1\varphi(1)}a_{2\varphi(2)}a_{3\varphi(3)}a_{4\varphi(4)} &= 1\cdot a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ &= 1\cdot f\cdot 7\cdot d\cdot 5 \\ &= 35df \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ 次の行列 A が逆行列を持たないような定数 a の値を全て求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} a-5 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & a-9 \\ 0 & a-2 & 0 \end{pmatrix}$$

解答) A の行列式の値は,

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a-5 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & a-9 \\ 0 & a-2 & 0 \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{③}\text{で展開}}{=\!=\!=} (a-2)\left(-\begin{vmatrix} a-5 & 1 \\ -3 & a-9 \end{vmatrix}\right) \\ &= -(a-2)\left\{(a-5)(a-9)+3\right\} \\ &= -(a-2)\left\{a^2-14a+48\right\} \\ &= -(a-2)(a-6)(a-8) \end{aligned}$$

となる. A が逆行列を持たない為の必要十分条件は $|A|=0$ であるので, 求める定数 a の値は

$$a = 2, 6, 8.$$

$\boxed{4}$ (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ の (i,j) 余因子 Δ_{ij} $(1 \leq i, j \leq 3)$ を計算し，それを (i,j) 成分とする行列 $B = (\Delta_{ij})$ を書け．

解答)

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 \qquad \Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \qquad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$\Delta_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 \qquad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad \Delta_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad \Delta_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad \Delta_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

よって，

$$B = (\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 5 \\ 10 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) A の行列式 $|A|$ を求めよ．

解答)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{②-2\times③}{\overset{①-2\times③}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 0 & -6 & -1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{\boxed{1}\text{で展開}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-6)(-2) - (-5)(-1) = 7$$

(3) A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

解答)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}{}^t(\Delta_{ij}) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 10 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{5}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} -22 & -50 \\ 10 & 23 \end{pmatrix}$ に対し，以下の問に答えよ．

(1) A の固有値 λ を全て求めよ．

解答)　A の固有多項式は

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -22-\lambda & -50 \\ 10 & 23-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2).$$

従って A の固有値は $\lambda = -2, 3$

(2) A を対角化せよ．答えは，「$P = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ のとき，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ となる」の形で答えること．

解答)　A の固有ベクトルを求める．

$\lambda = -2$ のとき，$A + 2E = \begin{pmatrix} -20 & -50 \\ 10 & 25 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$(A + 2E)\mathbf{x} = 0$ を解いて，固有ベクトルは $\mathbf{x}_1 = t_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad (t_1 \neq 0)$.

$\lambda = 3$ のとき，$A - 3E = \begin{pmatrix} -25 & -50 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$(A - 3E)\mathbf{x} = 0$ を解いて，固有ベクトルは $\mathbf{x}_2 = t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad (t_2 \neq 0)$.

よって，$P = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる．

(3) A^n (n は自然数) を求めよ．

解答)　$P = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列は $P^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ である．

よって，

$$\begin{aligned} A^n &= P\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5(-2)^n & -2\cdot 3^n \\ -(-2)^{n+1} & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5(-2)^n - 4\cdot 3^n & -5\cdot(-2)^{n+1} - 10\cdot 3^n \\ (-2)^{n+1} + 2\cdot 3^n & -(-2)^{n+2} + 5\cdot 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[0]講義に関する情報を次のウェブサイトに置いておく．http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/la1.html