線形代数 1, 中間テスト準備問題 (解答)

2015/10/26 担当：那須

学生証番号 | | | | | | | | 　氏名 | 　点数 |

- 問題用紙は 1 枚, 裏表合わせて 7 問ある. 解答は問題用紙の余白に書くこと.
- 試験開始直後に, 氏名と学生証番号を記入すること.
- 答えには下線を引くなどし, わかりやすくすること. 字の粗末な解答, 答えがどれか判別つかない解答は, 減点の対象になる場合がある.

$\boxed{1}$ 次の行列の積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, A^4 および $A^3 - 2A^2 + 5A - E$ を計算せよ.

Hamilton-Cayley の定理より,

$$A^2 - (1+1)A + (1^2 - 2\cdot(-1))E = A^2 - 2A + 3E = O.$$

従って, $A^2 = 2A - 3E$ を得る.

$$A^4 = (2A-3E)^2 = 4A^2 - 12A + 9E = 4(2A-3E) - 12A + 9E = -4A - 3E = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

一方,

$$A^3 - 2A^2 + 5A - E = (A^2 - 2A + 3E)A + 2A - E = OA + 2A - E = 2A - E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

答え：$A^4 = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ 　　$A^3 - 2A^2 + 5A - E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ 次の連立 1 次方程式を掃き出し法を用いて解け. ただし方程式の解が無い場合には, 「解無し」と答えよ.

(1)
$$\left(\begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 1 & 5 & 6 \\ -3 & -8 & 31 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{②}+3\times\text{①}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 49 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{②}\times 1/7} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{\text{①}-5\times\text{②}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -29 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

よって $x = -29, y = 7$

(2)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 2 & 3 & 4 & 16 \\ 1 & 1 & -6 & -9 \\ 4 & -2 & -3 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{①}\leftrightarrow\text{②}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & -9 \\ 2 & 3 & 4 & 16 \\ 4 & -2 & -3 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{③}-4\times\text{①}]{\text{②}-2\times\text{①}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -6 & -9 \\ 0 & 1 & 16 & 34 \\ 0 & -6 & 21 & 30 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[\text{③}+6\times\text{②}]{\text{①}-\text{②}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -22 & -43 \\ 0 & 1 & 16 & 34 \\ 0 & 0 & 117 & 234 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{③}\times 1/117} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -22 & -43 \\ 0 & 1 & 16 & 34 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[\text{②}-16\times\text{③}]{\text{①}+22\times\text{③}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

よって $x = 1, y = 2, z = 2$

(3)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & -9 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{③}+3\times\text{①}]{\text{②}-2\times\text{①}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{②}\times 1/3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[\text{③}+\text{②}]{\text{①}+2\times\text{②}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

よって $z = t$ とおけば, $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases}$ 　(t は任意)

$\boxed{4}$ 次の行列を行基本変形を用いて階段行列まで変形し, 階数を求めよ.

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1}\leftrightarrow\textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcircled{3}-2\times\textcircled{1}]{\textcircled{2}+\textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{2}\leftrightarrow\textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}+2\times\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

従って $\operatorname{rank} A = 3$

(2)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-2\times\textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}+3\times\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って $\operatorname{rank} B = 2$

$\boxed{5}$ 次の連立方程式が解を持つように定数 a と b の値を定め, 連立方程式を解け.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & -2 & -4 & 0 \\ 3 & -5 & -9 & 1 \\ -5 & 6 & 8 & a \\ -7 & 9 & 13 & b \end{array}\right) \xrightarrow[\textcircled{4}+7\times\textcircled{1}]{\textcircled{2}-3\times\textcircled{1},\textcircled{3}+5\times\textcircled{1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -12 & a \\ 0 & -5 & -15 & b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\textcircled{4}+5\times\textcircled{2}]{\textcircled{1}+2\times\textcircled{2},\textcircled{3}+4\times\textcircled{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+4 \\ 0 & 0 & 0 & b+5 \end{array}\right)$$

従って方程式の解が存在する為には, $a = -4$ かつ $b = -5$. $z = t$ とおけば,

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 - 3t & (t \text{ は任意}) \\ z = t \end{cases}$$

$\boxed{6}$ 行列 A に左からかけるとき, 次の基本変形を導く基本行列の積を求めよ. ($B = PA$ となる正則行列 P を求めよ.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1}\leftrightarrow\textcircled{3}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcircled{3}+3\times\textcircled{1}]{\textcircled{2}+2\times\textcircled{1}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-\textcircled{2}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

単位行列 E_3 に対し, 同じ基本変形を施すと,

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1}\leftrightarrow\textcircled{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcircled{3}+3\times\textcircled{1}]{\textcircled{2}+2\times\textcircled{1}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}-\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

従って, 求める基本行列の積は $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{7}$ 掃き出し法を用いて, 次の行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}+\textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{2}-\textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1}-\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって $\operatorname{rank} A = 3$ より, A^{-1} は存在する. 3 次単位行列 E_3 に上と同じ基本変形を施すと

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}+\textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{2}-\textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1}-\textcircled{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

従って求める逆行列は $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

[0]講義に関する情報を次のウェブサイトに置いておく. http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/2015/la1.html