

- 1 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値 λ と固有ベクトル \mathbf{x} を求めよ. (3 点: 固有値 1 点, 固有ベクトル 2 点)

解答) A の固有多項式は

$$g_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-3 & -2 \\ -2 & t-3 \end{vmatrix} = (t-3)^2 - (-2)^2 = t^2 - 6t + 5 = (t-1)(t-5).$$

従って A の固有値は $\lambda = 1, 5$.

- $\lambda = 1$ のとき,

$$A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

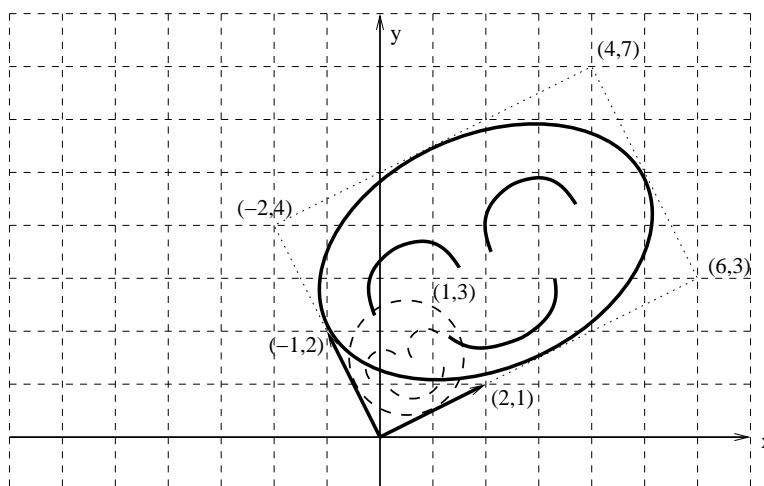
$(A - E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_1 = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($t_1 \neq 0$).

- $\lambda = 5$ のとき,

$$A - \lambda E = A - 5E = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A - 5E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解けば, 固有ベクトルは $\mathbf{x}_2 = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($t_2 \neq 0$).

- 2 2 次正方行列 A が $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ かつ $A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を満たすとする. このとき A の定める線形写像 T により, 下の図形 (ニコニコマーク) はどのような図形に写されるか? 概形を描け. (1 点)



ポイント!

それぞれの固有ベクトルの方向に, 固有値 λ 倍された図形を描く. つまり $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 方向に 3 倍, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 方向に 2 倍された図形を描く.